n.V.

~~E 16~~

OS 38 5

n.v.

A 176

Leitfaden

für den

Unterricht

in der

Formen- und Größen-Lehre.

Von

Wilhelm von Türk,

Königl. Preuß. Regierungs- und Schul-Rath, Ritter des rothen Adlerordens IIIter Klasse mit der Schleife und des Herzoglichen Sachsen-Ernestinischen Hausordens ꝛc.

Fünfte Auflage.

Mit 20 Kupfertafeln.

Potsdam, 1843.

Verlag von Ferdinand Riegel.

HERZOGL. BIBLIOTHEK STRAUBING

135 406 048

Bibliothèque Publique
Poissy

Vorrede.

Es ist wohl kaum eine Wissenschaft, welche das Denk-Vermögen so sehr in Anspruch nimmt, so übt und stärkt, als die Mathematik. Darum ist sie auch dem Erzieher wichtig.

Prüfen wir indessen unsere Schul- und Erziehungs-Anstalten mit unbefangenem Auge, so finden wir, daß gerade der Unterricht in dieser Wissenschaft oft auf eine unverantwortliche Weise vernachlässigt wird. Ich rede hier nicht von den gelehrten oder höheren Schulen in den größeren Städten. In diesen fängt man seit kurzer Zeit an, diesem Gegenstande des Unterrichts eine größere Aufmerksamkeit zu widmen, obgleich noch in manchen das Vorurtheil herrschen dürfte, daß nur Wenige von dieser Wissenschaft im Leben Gebrauch machen können, und sie daher nur für diese Wenigen gehöre. Ich rede vornemlich von den sogenannten Bürger-Schulen in den kleineren Städten, und selbst von den größeren Land-Schulen, die mehrere Classen haben.

Hier wird größtentheils gar kein mathematischer Unterricht ertheilt — der im Rechnen ist gewöhnlich bloß mechanisch, und so geschieht wenig, was das Denk-Vermögen der jungen Leute entwickeln, üben, stärken könnte. Die Ursache dieses Mangels liegt freilich zum Theil in den Lehrern. Wie könnten sie Unterricht geben in einer Wissenschaft, die ihnen entweder fremd geblieben ist, oder die sie doch nie gründlich erlernt haben! Steht auch vielleicht Mathematik mit 2 Stunden wöchentlich im Lections-Plane, so wird der Unterricht darin so elend, so geistlos betrieben, daß er den Schülern, wie dem Lehrer, peinlich ist und seyn muß. — So ist es — aber so darf es nicht bleiben.

Da ich nun der Meinung bin, daß man von jedem

Lehrer, vorzüglich aber von dem, der einst als Rector, Director, Oberlehrer an der Spitze einer Schule stehen will, gründliche mathematische Kenntnisse, als unerläßliche Bedingung, fordern sollte, weil sie für seinen Beruf eben so wichtig sind, als Kenntnisse in den alten Sprachen, und weil ein Mann, der denken kann, jeden anderen Zweig des Unterrichts besser behandeln wird: so fand ich mich bewogen, das vorliegende Werk auszuarbeiten, das ihnen zum Leitfaden bei diesem Zweige des Unterrichts dienen sollte.

Dies Werk ist übrigens nicht bloß für denjenigen Lehrer, welcher in der Mathematik Unterricht zu ertheilen hat, bestimmt; ich wünsche, daß jeder Lehrer versuche, sich daraus zu unterrichten, auch wenn die Mathematik nicht auf seinem Lections=Plane steht.

Ich verlange nemlich von jedem Lehrer, auch von dem einer Land=Schule, daß er im Denken geübt sey, so wie, daß er beträchtlich höher stehe, als seine Schüler. Zum Denken nun wird ihn mein Buch führen. Will er sich die Mühe geben, einzelne vorzüglich fähige Schüler, außer den gewöhnlichen Schulstunden, darnach zu unterrichten, so wird er sich um diese ein wesentliches Verdienst erwerben, ihm selbst aber wird die Sache dadurch klarer und deutlicher werden. — Er wird dann, mit Klarheit des Geistes ausgerüstet, jeden Gegenstand des Unterrichts denkend, also besser behandeln und sein Amt freudiger verwalten, weil er es mit glücklicherem Erfolge thut.

Ein Lehrbuch für unsere Schulen muß den Weg, der eingeschlagen werden soll, genau vorzeichnen, alles Ueberflüssige übergehen, sich auf das Wesentliche, auf das mit Rücksicht auf die Zeit, die dem Gegenstande gewidmet werden kann, Mögliche beschränken, ohne jedoch der nöthigen Lückenlosigkeit etwas zu vergeben. Daher ist manches weniger Wesentliche übergangen worden.

Wird es mir gelingen, durch mein Werk das Studium der mathematischen Wissenschaften allgemeiner zu verbreiten, sodann die Lehrer des Volks zum Denken, zu klaren Begriffen, und eben darum zu zweckmäßigerer Behandlung auch der anderen Unterrichts=Gegenstände zu führen, endlich manche

in der heranwachsenden Jugend schlummernde Kraft und Anlage zu wecken, für das Vaterland in's Leben und in Thätigkeit zu setzen, so wird der Zweck des Buches erfüllt seyn.

Ich erlaube mir indessen, noch folgende Bemerkungen für Lehrer, die sich dessen beim Unterrichte bedienen wollen, hinzuzufügen:

Das, was wir Andre lehren wollen, müssen wir vor allen Dingen selbst klar und deutlich eingesehen haben. Ein Lehrbuch lesen und den Inhalt nun so vortragen, wie er im Buche steht, heißt aber noch lange nicht, die Sache, von der das Buch handelt, klar und deutlich eingesehen haben.

Um hierüber mit sich selbst ins Reine zu kommen, empfehle ich daher den Lehrern folgendes Verfahren:

1) In Ansehung der Formenlehre:

Sie sollen von Anfang an jede Aufgabe erst selbst lösen, ohne sogleich die Auflösung des Buchs zu Hülfe zu nehmen. Das Buch sey ihr Lehrmeister, zu dem sie nur dann ihre Zuflucht nehmen, wenn sie die Auflösung nicht selbst finden können. So sollen sie in der Formen-Lehre alle Fälle selbst aufsuchen, die einer gegebenen Bedingung entsprechen, z. B. bei der 5ten Stufe, wo die Aufgabe vorkommt:

Wie viele Fälle giebt es in Ansehung der Anzahl von Winkeln, welche 3 Linien bilden können, die sich in 1 Punkt vereinigen?

Hier suche der Lehrer, mit Hülfe der Tafel, erst für sich alle Fälle auf, und vergleiche dann das Gefundene mit der Antwort des Kindes im Buche; trifft beides nicht zusammen, so kann er in der Regel annehmen, daß der Fehler auf seiner Seite sey — er muß dann suchen, wo er gefehlt hat.

Nur so vorbereitet trete er in die Schule, um nun die verschiedenen Fälle durch die Kinder aufsuchen zu lassen. Dadurch, daß er den Gegenstand lehrend behandelt, wird ihm derselbe noch deutlicher, und er bedarf daher später, wenn er die Formen-Lehre nur erst einmal vorgetragen hat, keiner weitern Vorbereitung.

Meiner Meinung nach eignet sich dieser Gegenstand des Unterrichts am meisten für Schüler in dem Alter von

12 Jahren und darüber; ich habe es daher nie gebilligt, wenn ich in Unterrichts-Anstalten, und selbst in Landschulen, 6jährige Kinder damit beschäftigen sah. Bei den meisten Kindern dieses Alters wird die für diesen Gegenstand erforderliche Reife des Geistes dann noch nicht eingetreten seyn; sie werden denselben also nicht mit vollem Bewußtseyn betreiben. Hierzu kommt, daß die Formen-Lehre Theils als selbstständiger Gegenstand des Unterrichts, Theils und vorzüglich aber als Vorbereitung für die Größenlehre betrachtet werden kann. Letztere sollte sich daher immer unmittelbar an erstere anschließen; das kann aber nur dann geschehen, wenn der Geist des Kindes die gehörige Reife für letztere erlangt hat, und das wird selten vor erreichtem 12ten Jahre der Fall seyn.

Was nunmehr 2) die Behandlung des Unterrichts in der Größenlehre betrifft, so fordert auch dieser, wenigstens anfänglich, eine sorgfältige Vorbereitung von Seiten des Lehrers.

Er nehme vor der Stunde diejenigen Aufgaben, welche die Reihenfolge des Buches darbietet, und versuche, sie ohne Hülfe der Auflösung im Buche zu lösen. Nur dann, wenn er, bei gehörigem Nachdenken, die Auflösung nicht finden kann, nehme er die des Buchs zur Hand.

Ich sage: Bei gehörigem Nachdenken, denn leider sind nur zu viele Lehrer gewohnt, das, was sie den Kindern vortragen wollen, ohne weiteres Nachdenken aus Büchern zu entlehnen, ohne es sich selbst angeeignet, ja oft ohne es selbst verstanden zu haben. — Ich wünsche daher, daß es der gutdenkende Lehrer nicht verschmähe, sich selbst im reifen Alter noch im Denken zu üben, und zu erwägen, daß er nur das seinen Schülern erklären kann, was ihm selbst klar ist.

Er zeichne zu diesem Ende die nöthigen Figuren, jedoch ohne die Hülfs-Linien, aus freier Hand, ohne Hülfe des Lineals und Zirkels, recht groß und deutlich an die Wandtafel. Im Anfange wird ihm das schwer fallen, bald aber wird er die gehörige Uebung erlangen. Die Figuren werden dann freilich nicht so richtig gezeichnet, als mit Hülfe der Instrumente, allein darauf kommt es dabei auch nicht an; da die Bedingungen durch Worte ausgesprochen sind, so

denkt sich das Kind die Linie der Bedingung entsprechend, wenn sie auch, mit dem Zirkel gemessen, vielleicht als unrichtig gezogen erscheinen sollte.

Es sey z. B. ein gleichseitiges Dreieck gegeben, so können Lehrer und Schüler alle Wahrheiten auffinden, die auf diese Voraussetzung sich stützen, auch wenn die Seiten in der Wirklichkeit nicht von gleicher Größe seyn sollten, denn in Gedanken schwebt ihnen doch ein gleichseitiges Dreieck vor. — Da es sehr darum zu thun ist, daß das Kind sich früh gewöhne, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu unterscheiden, so ist eine Behandlung dieses Gegenstandes gewiß vorzuziehen, wo das Unwesentliche, das Bild oder die Zeichnung, als Neben-Sache, die geistige Anschauung des wahren Verhältnisses als Haupt-Sache hervortritt. Hiezu kommt, daß jedes Kind die zur Auffindung und Führung der Beweise nöthigen Figuren auf seine Tafel zeichnen soll. Müßte das mit Zirkel und Lineal geschehen, so würde der Besitz eines Reißzeuges und ein großer Zeit-Aufwand dazu erfordert werden. Daher gebührt der freien Handzeichnung der Vorzug.

Nachdem nun der Lehrer die der Aufgabe entsprechende Figur für sich selbst gezeichnet hat, suche er den Beweis, ziehe die Hülfs-Linien, die er zu gebrauchen glaubt, und nur, wenn er den Beweis nicht bündig sollte führen können, nehme er seine Zuflucht zum Buche.

Leicht möglich, daß er hier und da einen bessern Beweis findet, als den des Buches. — Diese Vorarbeit ist, Falls der Lehrer gewissenhaft zu Werke geht, zugleich darum sehr wichtig, weil er dadurch die Schwierigkeiten jedes einzelnen Beweises kennen lernt, und nun gewiß seine Schüler nachsichtiger beurtheilen wird, wenn sie, gleich ihm selbst, den Beweis nicht sogleich oder ohne Hülfe finden sollten. Denselben Gang, den ich hier dem Lehrer selbst empfohlen habe, beobachte er bei dem Unterrichte der Schüler. Er zeichne ihnen die Figur vor, auf die sich die zu lösende Aufgabe bezieht, doch ohne Hülfs-Linien; und nachdem er ihnen deutlich erklärt hat, was bewiesen oder aufgesucht werden soll, lasse er einen von ihnen an die Tafel treten und versuchen:

ob er die Aufgabe lösen kann? Vermag er es nicht, so führe er ihn durch Fragen auf den Beweis hin; sind Hülfs-Linien nöthig, so veranlasse er ihn, diese zu ziehen — nehme aber immer das eigne Nachdenken des Schülers möglichst in Anspruch.

Diese Art und Weise des Unterrichts schließt alle Täuschung aus. — Der nach ihr unterrichtete Schüler wird nicht nur einzelne Sätze, die er sich zuvor sorgfältig eingeprägt, zu beweisen im Stande seyn, sondern er wird innerhalb der Gränzen des erhaltenen Unterrichts jede Aufgabe lösen. — Der Lehrer erlangt übrigens auch dadurch noch den großen Vortheil, daß er mehrere Abtheilungen einer Classe, die auf verschiedenen Stufen stehen, zugleich beschäftigen kann; indem er nemlich das, was die eine Abtheilung gefunden hat, untersucht, und, wo es nöthig, berichtigt, sind die andern mit dem Suchen der Beweise der ihnen gegebenen Aufgaben beschäftigt.

Auf diese Weise wird der weniger fähige Schüler nicht verwahrloset und übergangen: der fähigste nicht unnöthig aufgehalten.

Noch muß ich bemerken, daß der nemliche Gang des Unterrichts, den ich hier angedeutet, auch in meinem Leitfaden zum Unterrichte im Rechnen beobachtet worden ist, so daß bei diesen beiden Zweigen des mathematischen Unterrichts die vollkommenste Uebereinstimmung Statt findet.

Potsdam, den 8. Januar 1817.

Der Verfasser.

Vorrede zur 5ten Auflage.

Der Gang des Unterrichts in der Formen- und Größenlehre hat sich nun, bei dessen Anwendung, in einer Reihe von Jahren fortdauernd bewährt und es ist mir von vielen Lehrern aus der Nähe und aus weiter Ferne die Versicherung geworden, daß sie diesem Werke es verdanken, den Unterricht in der Mathematik mit Erfolg ertheilen zu können.

Ich habe selbst einige meiner Waisen in Kl.-Glinicke nach diesem Leitfaden unterrichtet und die Genugthuung gehabt, daß sie noch nach Jahren einzelne beliebig von mir gewählte Aufgaben auflösen konnten; wiewohl sie sich seitdem nicht wieder mit dem Gegenstande beschäftigt hatten.

Man hat hier und da die Behauptung aufgestellt, daß der hier befolgte Gang des Unterrichts sich nur für die Elemente der Geometrie eigne und nicht zu den höhern Regionen leite; daß dieß keinesweges der Fall ist, sondern daß man auf diesem Wege zu dem Gipfel der mathematischen Wissenschaften gelangen kann, beweisen die Schriften des Herrn Professors Jacob Steiner in Berlin, der, gleich mir, Pestalozzi's Schüler war, insbesondere dessen beide Werke:

1) Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Prismen, Projectionsmethoden, Transversaten, Dualität und Reciprocität 2c., und
2) Die geometrische Construction, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung.

In der höhern Bürger= und in der Gewerbe=Schule zu Potsdam wird der mathematische Unterricht nunmehr seit einer Reihe von Jahren nach Anleitung dieses Werkes ertheilt und die Schüler, die von letzterer in die höhere Gewerbe=Schule zu Berlin übergehen, haben sich stets durch gute Kenntnisse in der Mathematik ausgezeichnet.

Es ist das das Resultat des lückenlosen Ganges.

Klein=Glinike bei Potsdam, den 8. Januar 1843.

Der Verfasser.

Inhalts-Anzeige.

Erste Abtheilung.

Formen-Lehre.

I. Abschnitt.

Formen, die durch die Verbindung gerader Linien entstehen.

Seite

1ste Stufe. Eigenschaften des Punkts, der geraden und krummen Linie. 1
2te St. Vergleichung der Lage zweier und mehrerer Linien. . . . 3
3te St. Vereinigung zweier und mehrerer Linien in einem oder in mehreren Punkten. 7
4te St. Vereinigung mehrerer L. in einem oder in mehreren P., mit Rücksicht auf das Durchgehen der L. durch den Ver.-P. . . . 9
5te St. Bildung der Winkel und ihre Anzahl bei Vereinigung von 2, 3 und 4 Linien in einem oder in mehreren Punkten. . . . 10
6te St. Anzahl der Winkel, mit Rücksicht auf das Gleich- und Ungleichlaufend-Seyn der Linien. 11
7te St. Schenkel der Winkel. 12
8te St. Verschiedene Arten der Winkel. 13
9te St. Neben-Winkel. 14
10te St. Scheitel-Winkel. 16
11te St. Gegen-Winkel. 17
12te St. a. Wechsel-Winkel. 18
12te St. b. Zusammenhang der Winkel unter einander. 19
12te St. c. Nähere Entwickelung der Neben- und Scheitelwinkel. . 21
12te St. d. Nähere Entwickelung der Gegen- und Wechselwinkel. . 23
13te St. Verbindung von 3, 4 und 5 Linien in 1, in 2 und in mehreren Punkten, mit Rücksicht auf die Art der Winkel. 25
14te St. Betrachtung eines und desselben Winkels unter verschiedenen Rücksichten. 28
15te St. Verschiedene Arten der Winkel bei geschlossenen Figuren, die durch 3 und 4 Linien gebildet werden. 30
16te St. Gleichheit oder Ungleichheit der S. geschlossener Figuren. . 31
17te Stufe. Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten bei vierseitigen Figuren, mit Rücksicht auf die Art der Winkel. 32

Seite

18te St. a. Regelmäßigkeit und Unregelmäßigkeit der Figuren. . . 34
18te St. b. Geschlossene Figuren mit äußern und innern W. . . . 35
18te St. c. Verschiedenartigkeit der Vielecke. 38
19te St. Geschlossene Figuren, die dadurch entstehen, daß in geschlossenen Figuren eine oder mehrere Linien gezogen werden. 40
20ste St. Geschlossene Figuren, die durch Verbindung solcher Figuren in Punkten gebildet werden. 41

II. Abschnitt.

Formen, die durch Verbindung krummer Linien entstehen.

21ste St. Die Kreis-Linie; ihre Vergleichung mit der geraden L. . 42
22ste St. Der Bogen. 43
23ste St. Vereinigung der Kreise und Bogen. 44
24ste St. Anzahl der Winkel, die durch die Vereinigung zweier oder mehreree Bogen oder Kreise gebildet werden können. 45
25ste St. Verschiedene Arten der Winkel, die durch Bogen und Kreise gebildet werden. 48
26ste St. Art der W., die durch Vereinigung dreier oder mehrerer Bogen in 1 oder in 2 P. gebildet werden, ohne daß eine geschlossene Figur entsteht. 49
27ste St. Bildung geschlossener Figuren, die durch die Verbindung zweier oder mehrerer Bogen entstehen. 51
28ste St. Anzahl und Art der geschlossenen Figuren, die durch die Verbindung von 2 oder 3 Bogen und Kreisen gebildet werden können. 52

III. Abschnitt.

Formen, die durch die Verbindung gerader und krummer Linien entstehen.

29ste St. Vereinigung der geraden und krummen L. in P., Benennung der dadurch entstandenen Winkel. 53
30ste St. Anzahl und Art der Winkel, die durch die Verbindung zweier und mehrerer geraden und krummen Linien entstehen. . . 54
31ste St. Bildung geschlossener Figuren durch die Verbindung gerader und krummer Linien. 55

Zweite Abtheilung.

Größen-Lehre.

I. Abschnitt.

Linien und Winkel.

1ste St. Eigenschaften einer geraden Linie und Veränderungen, die mit ihr vorgenommen werden können, durch Hinzu- und Hinwegthun. 57
2te St. Vergleichung zweier Linien in Rücksicht der Größe. 61

Seite

3te St. Veränderungen, die mit 2 gleichen Linien vorgehen, durch Hinzuthun oder Hinwegthun. 62
4te St. Bestimmung des Maaßes einfacher Winkel. 65
5te St. Bestimmung des Maaßes der Neben-Winkel. 67
6te St. Bestimmung des Maaßes der Scheitel-Winkel; ihrer Gleichheit und Ungleichheit. 68
7te St. Bestimmung des Maaßes der Gegen-Winkel und ihrer Gleichheit und Ungleichheit. 69
8te St. Bestimmung der Gleichheit und Ungleichheit der äußern Gegen-W. mit den innern, hinsichtlich ihres Maaßes. 71
9te St. Bestimmung der Gleichheit der Wechsel-Winkel in Hinsicht ihres Maaßes. 72
10te St. Bestimmung der Gleichheit der Winkel bei Verbindung dreier Linien, so daß sie 4 Winkel bilden. 73

II. Abschnitt.

Vergleichung der Seiten und Winkel geschlossener Figuren.

11te St. Bestimmung der Summe des Maaßes der W. eines Dr. . 76
12te St. Vergleichung des Maaßes der Außen-Winkel eines Dr. mit dem Maaße der innern Winkel. 77
13te St. Bestimmung des Maaßes der Winkel im Dreiecke unter gegebenen Bedingungen. 79
14te St. Gleichheit und Ungleichheit der Winkel, die dadurch entstehen, daß man in gegebenen Figuren eine Linie zieht, welche einen ihrer Winkel theilt. 81
15te St. Gleichheit und Ungleichheit der W., die dadurch entstehen, daß man 2 W. eines Dr. jeden durch eine L. theilt. 83
16te St. Bestimmung des Maaßes der Summe der W. eines Vierecks, Fünfecks u. s. w. mit lauter innern W. 85
17te St. Bestimmung des Maaßes der äußern und innern W. bei Figuren mit äußern Winkeln. 88
18te St. Vergleichung zweier Dreiecke in Absicht auf Gleichheit und Ungleichheit derselben. 93
19te St. Einfluß einer Th.-L., die von einem P. einer Seite eines Dr. nach einem P. einer andern S. desselben Dr. gezogen wird, auf die Gleichheit und Ungleichheit der S. der dadurch entstandenen Dreiecke. 101
20ste St. Einfluß einer Th.-L., die von einem P. einer S. eines Dr. nach einem P. einer andern S. desselben Dr. gezogen wird, auf die Gleichheit und Ungleichheit der getheilten S. 108
21ste St. a. Verhältnißbestimmung der Stücke solcher sich schneidenden Linien, welche in Dr. von bestimmten Theilen der S. aus gezogen werden. 111
21ste St. b. Verlängerung der S. des Dr. und der in demselben gezogenen L., und Bestimmung der Verhältnisse der zerschnittenen Stücke. 114
22ste St. a. Gleichheit und Ungleichheit der W., die dadurch entstehen, daß man Qu., Pgr. u. s. w. durch eine Eck-L. theilt. 117
22ste St. b. Verhältnißbestimmung der Stücke solcher sich schneidenden Linien, welche in Pgr. von bestimmten Th. der S. aus gezogen werden. 119
22ste St. c. Verlängerung der in den Qu. gezogenen Linien und der Seiten. 121

Seite

III. Abschnitt.

Vergleichung des Inhalts geschlossener Figuren.

23ste St. Auffinden des Inhalts eines Dr., Qu., Fünfecks u. s. w. 122
24ste St. a. Auffinden der Gleichheit zweier Dreiecke in Absicht auf ihren Inhalt. 129
24ste St. b. Bestimmung des Flächen-Inhalts zerschnittener Dr. zu dem ihrer einzelnen Stücke. 136
24ste St. c. Verlängerungen bei dem Dr. und Bestimmung des Flächen-Inhalts der dadurch gebildeten Figuren. 140
25ste St. a. Vergleichung des Inhalts der Dr., Pgr. und Tr. . . . 142
25ste St. b. Berechnung des Flächen-Inhalts zerschnittener Pgr. . . 145
26ste St. a. Verwandlung der Figuren in Figuren anderer Art, aber gleichen Inhalts. 148
26ste St. b. Theilung der Dreiecke nach gegebenen Verhältnissen von einem Punkte aus. 154
27ste St. Auffinden der Gleichheit oder Ungleichheit des Inhalts der Dreiecke, welche auf der S. und Theilungs-Linie eines gegebenen Dreiecks ähnlich beschrieben worden. 157
28ste St. Auffinden der Gleichheit oder Ungleichheit des Inhalts der Vierecke, welche auf den S. und Theilungs-Linien eines gegebenen Vierecks ähnlich beschrieben werden. 164
29ste St. Folgerungen aus dem Vorhergehenden. Der Pythagoräische Lehrsatz. 170
30ste St. Fortsetzung. Andere Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz. 173
31ste St. Auffinden des Verhältnisses des Inhalts der durch Hülfe verschiedenartiger Theile einer gegebenen Linie gebildeten Quadrate und Rechtecke. 177
32ste St. Gleichheit oder Ungleichheit des Inhalts zweier Dreiecke u. s. w. mit Rücksicht auf die Summe der Seiten. 187

IV. Abschnitt.

Der Kreis.

33ste St. Aufsuchung und Benennung der verschiedenen, in Beziehung auf den Kr. und dessen M. P. gezogenen L. 191
34ste St. Eigenschaften und Verhältnisse der innerhalb eines Kreises gezogenen Linien. 194
35ste St. Verhältnisse der, durch innerhalb des Kreises gezogene Linien gebildeten Winkel. 199
36ste St. Verhältnisse der außerhalb des Kr. gezogenen L., zu dem Kr. und zu den L., innerhalb des Kr. 202
37ste St. Bildung und Theilung der L. durch Hülfe des Kr. 207
38ste St. Beschreibung von Kr. in Beziehung auf gegebene P., und Auffinden von P. in Beziehung auf einen gegebenen Kr. 209
39ste St. Bildung und Theilung der W. durch Hülfe des Kr. . . . 211
40ste St. Bildung geradliniger Figuren durch Hülfe des Kr. 213
41ste St. Beschreibung geradliniger Figuren in einen Kreis. 215
42ste St. Beschreibung geradliniger Figuren um einen Kreis. . . . 217
43ste St. Beschreibung eines Kreises um eine geradlinige Figur. . . 218
44ste St. Beschreibung eines Kreises in eine geradlinige Figur. . . 219
45ste St. Verhältnisse der Linien im und am Kreise. 220
46ste St. Das Fünfeck. 224

Seite
47ste St. Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise. 232
48ste St. Berechnung von Umfang und Durchmesser bei gegebenen Kreisen. 235
49ste St. Flächeninhalt des Kreises. 236

Nachtrag.

Stereometrie. 241
Von der Flächenberechnung. 243
Von der Körperberechnung. 246
Das Prisma. 249
Der Zylinder. 253
Vom Kegel. 267
Von der Kugel. 274

Abkürzungen.

P. Punkt.
Th.=P. Theilungs=Punkt.
D.=P. Durchschnitts=Punkt.
M.=P. Mittel=Punkt.
V.=P. Vereinigungs=Punkt.
B.=P. Berührungs=Punkt.
Sch.=P. Scheitel=Punkt.
S. Seite.
Sch. Schenkel.
L. Linie.
Th.=L. Theilungs=Linie.
Ber.=L. Berührungs=Linie.
H.=L. Hülfs=Linie.
W. Winkel.
r. W. rechter Winkel.
st. W. stumpfer Winkel.
sp. W. spitzer Winkel.
N.=W. Neben=Winkel.
W.=W. Wechsel=Winkel.
G.=W. Gegen=Winkel.
Sch.=W. Scheitel=Winkel.
A.=W. Außen=Winkel.
D.=M. Durchmesser.
H.=M. Halbmesser.
Dr. Dreieck.
Qu. Quadrat.
Pgr. Parallelogram.
R.=E. Rechteck.
Tr. Trapez.
P.=Tr. Parallel=Trapez.
F.=E. Fünfeck.
Kr. Kreis.
H.=Kr. Halbkreis.
gr. größer.
kl. kleiner.
gll. gleichlaufend.
ungll. ungleichlaufend.
gl. gleich.
ungl. ungleich.
rwkl. rechtwinklich.
stwkl. stumpfwinklich.
spwkl. spitzwinklich.
glsch. gleichschenklich.
glf. gleichseitig.
unglf. ungleichseitig.
kr. krumm.

Erste Abtheilung.

Formen-Lehre.

I. Abschnitt. Formen, die durch die Verbindung gerader Linien entstehen.

I. Stufe. Eigenschaften des Punkts, der graden und krummen Linie.

Lhr. (Indem er einen Punkt, eine gerade Linie, und eine krumme Linie an die Tafel gezeichnet.)

1. 2. 3.

Wie nennt man (auf 1 zeigend) dies Zeichen hier?

Kdr. Einen Punkt.

Lhr. (auf 2 und 3 zeigend) und diese beide Zeichen hier?

Kdr. Linien.

Lhr. Könnt ihr euch in jenem Punkte eine Mitte denken?

Kdr. O ja!

Lhr. Das nennt man den Mittelpunkt oder auch wohl bloß einen Punkt. Könnt ihr so einen Punkt wohl zeichnen? —

Kdr. Nein! denn in dem gezeichneten könnten wir ja immer noch eine Mitte denken.

Lhr. Da kann man ihn wohl gar nicht zeichnen?

Kdr. Nein!

Lhr. Das kommt daher, weil ein solcher Punkt keine Ausdehnung hat. Der aber auf der Tafel hat Ausdehnung, und ist bloß das Zeichen für einen solchen gedachten Punkt.

Könnt ihr mir nun sagen, welcher Unterschied zwischen einem Punkte und einer Linie Statt findet?

Kdr. Der Punkt hat keine Ausdehnung, wohl aber die L.

Lhr. (indem er von dem P. aus eine L. zieht.) Jetzt, indem ich diesem P. eine Ausdehnung in die Länge gebe, oder ihn fortbewege — bleibt es ein P.? — Kdr. Nein!

Lhr. (indem er die L. Fig. 2 verlängert.) Bleibt diese L. eine L.? — Kdr. Ja!

Lhr. Also eine zweite Verschiedenheit. Wenn ich einem P. eine Ausdehnung in die Länge geben wollte, so würde er aufhören, ein P. zu seyn. Eine L. kann ich ausdehnen in die Länge, sie bleibt doch immer eine L. (indem er noch eine gerade L. an die Tafel zeichnet.)

Habe ich diese L. angefangen? — Kdr. Ja!

Lhr. Den P., wo die L. anfängt, nennen wir:

Anfangspunkt.

Endigt sich die L. irgendwo?

Kdr. Ja! sie endigt sich auf der entgegengesetzten Seite.

Lhr. Wie werden wir den P. nennen, wo sie sich endigt?

Kdr. Den Endpunkt.

Lhr. Was für 2 Punkte sind es wohl, welche die Richtung der L. bestimmen?

Kdr. Der Anfangspunkt und der Endpunkt.

Lhr. (indem er 2 Punkte in einiger Entfernung und in wagerechter Richtung an die Tafel zeichnet.)

• •

Macht jetzt 2 P. in gleicher Entfernung und in gleicher Richtung auf eure Tafeln.

(nachdem es die Kinder gethan.)

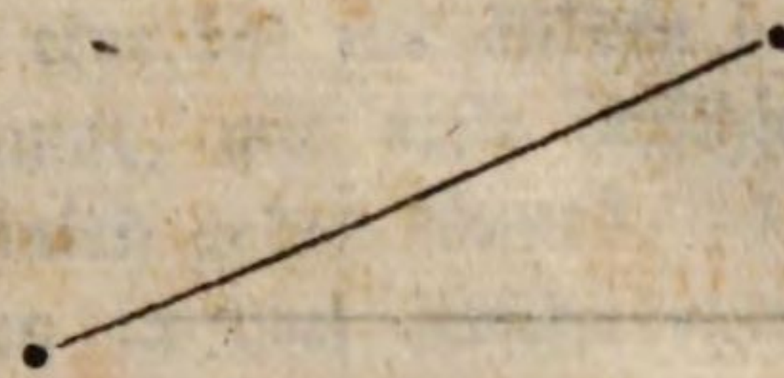
Jetzt vereinigt beide P. durch eine gerade L., wie ich es hier thue.

•————•

(nachdem es die Kinder gethan, zeichne der Lehrer zwei andere P. an die Tafel, in einer Richtung, die von der Richtung jener ersten beiden P. abweicht.)

•

Vereinigt jetzt beide P. durch eine gerade L. (s. die Fig.)



Was bestimmt wohl die Richtung einer geraden L.?

Kdr. Die Lage zweier P., oder die Lage des Anfangs- P. und des End-P. bestimmt die Richtung der L.

II. Stufe. Vergleichung der Lage zweier, dreier und mehrerer Linien.

Lhr. Können zwei L. sich vereinigen?

Kdr. Ja! zwei L. können sich vereinigen.

Lhr. Zeichnet zwei vereinigte L. auf eure Tafeln. Müssen 2 L. sich vereinigen?

Kdr. Nein! 2 L. können auch unvereinigt seyn.

Lhr. Zeichnet das ebenfalls.

Kdr. Hier sind 2 unvereinigte L.

Lhr. Was können also 2 Linien seyn?

Kdr. Entweder vereinigt oder unvereinigt.

Lhr. Wir wollen jetzt einmal bei den unvereinigten L. stehen bleiben. Zeichnet 2 L., die so beschaffen sind, daß sie, verlängert, nur eine einzige L. bilden würden.

Lhr. (indem er zwei Linien von gleicher Eigenschaft an die Tafel zeichnet.) Diese L. liegen in einer und der nemlichen Richtung (indem er die eine nach der andern hin verlängert).

Sind es jetzt noch zwei L.?

Kdr. Nein! jetzt bilden sie nur eine einzige L.

Lhr. Müssen aber zwei L. immer in der nemlichen Richtung liegen?

Kdr. Nein! sie können auch in verschiedener Richtung liegen.

Lhr. Einer von euch zeichne das an die große Tafel.

Lhr. Richtig! — Aber wer kann 2 L. zeichnen, welche die nemliche Richtung haben, und sich doch nicht vereinigen, wenn man die eine oder die andere auch noch so sehr verlängert?

(Einige werden 2 gll. L. zeichnen.)

Lhr. Das ist recht! diese beiden L. mag ich so sehr verlängern, als ich will, sie kommen doch nie zusammen. Solche L. nennen wir:

gleichlaufende Linien.

Lhr. Welche Eigenschaft haben also gll. L.?

Kdr. Gll. L. können nie zusammentreffen, wenn man sie verlängert.

Lhr. Wodurch unterscheiden sich die gll. L. von den ungll.?

Kdr. Die ungll. treffen zusammen, wenn man sie nach der einen Seite hin verlängert, die gll. können nie zusammentreffen. Die ungll. L. entfernen sich auf der andern Seite immer weiter von einander; die gll. bleiben immer in gleicher Entfernung.

Lhr. Jeder zeichne jetzt auf seine Tafel zwei gll. L., zwei ungll. und zwei L., die in der nemlichen Richtung liegen. Was haben die gll. L. mit denen gemein, die in der nemlichen Richtung liegen?

Kdr. Beide haben unter sich die nemliche Richtung.

Lhr. Wodurch unterscheiden sie sich?

Ein Kd. Die gll. L. können nie zusammentreffen, wenn man sie verlängert. Die beiden L., die in einer und der nemlichen Richtung liegen, treffen zusammen, wenn man die eine nach der andern hin verlängert.

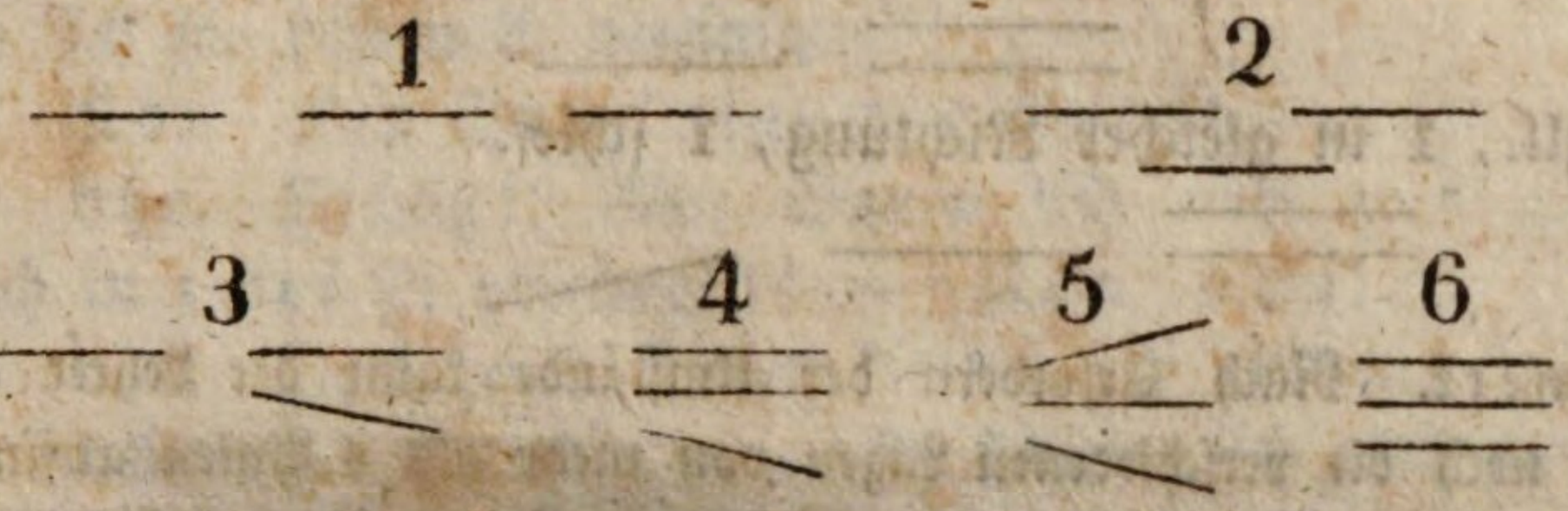
Ein andres Kd. Die beiden gll. L. bleiben immer

zwei L., man mag sie noch so sehr verlängern, die beiden L., die in der nemlichen Richtung liegen, hören auf zwei L. zu seyn, wenn man die eine bis zur andern verlängert.

Lhr. Versucht einmal, wie viele verschiedene Lagen ihr dreien unverbundenen Linien geben könnt?

Kdr. Zwei konnten in drei verschiedenen Lagen gezeichnet werden.

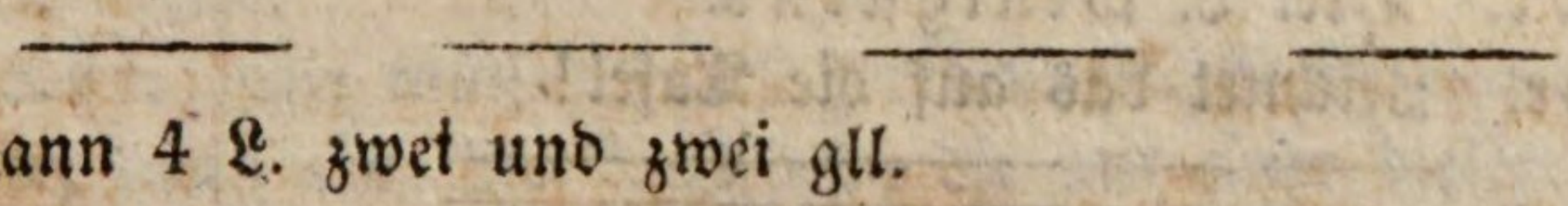
Die dritte muß nun zu den vorigen hinzugefügt werden.



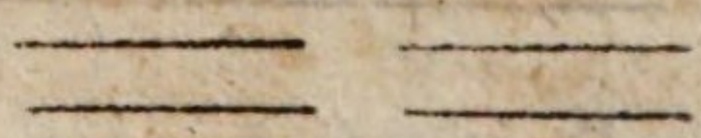
Dies giebt 6 verschiedene Fälle.

Lhr. Gut. Versucht es jetzt mit vier Linien. Wie viel Fälle könnt ihr davon auffinden?

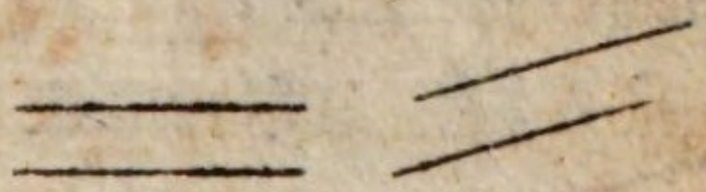
Kdr. Erst 4 L. in einer Richtung.



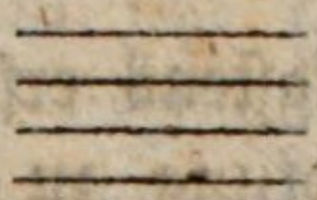
Dann 4 L. zwei und zwei gll.



oder



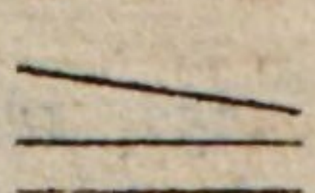
Ferner 4 L. gll.



4 L. ungll.

3 L. gll. 1 ungl.

2 L. gll. 2 ungll.



3 L. in einer Richtung, 1 schief.

2 L. in einer Richtung, 2 schief.

3 L. gll., 1 in gleicher Richtung

2 L. gll., 1 in gleicher Richtung, 1 schief.

Anmerk. Nach Erfordern der Umstände kann der Lehrer auch noch die verschiedenen Lagen von mehr als 4 Linien aufsuchen lassen. Die Zahl der verschiedenen Lagen steigt bei 5 Linien auf 18, bei 6 L. auf 26 ꝛc.

Lhr. Wie viele L. werden wenigstens erfordert, um zugleich gll. und ungll. zu haben?

Kdr. Drei L. wenigstens.

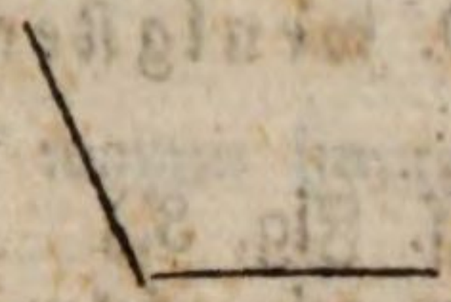
Lhr. Zeichnet das auf die Tafel!

Wie viele L. werden wenigstens erfordert, um zugleich gll. und L. in der nemlichen Richtung zu haben? — zwei ungll. und zwei in der nemlichen Richtung. Wie viele L., damit zwei gll., zwei ungll. und zwei in der nemlichen Richtung seyen?

Kdr. Vier L.

III. Stufe. Vereinigung zweier und mehrerer Linien in einem oder in mehreren Punkten.

Lhr. Jeder zeichnet zwei ungll. L., die sich vereinigen. (Nachdem sie es gethan.)



Wie wird man den P. nennen (auf diesen P. hinzeigend), wo sich die beiden L. vereinigen?

Kdr. Den Vereinigungs-Punkt.

Lhr. Richtig! Aber können sich wohl zwei gerade L. auch in zwei P. vereinigen? — Kdr. Nein!

Lhr. Zwei gerade Linien können sich also nur in einem P. vereinigen. In wie vielen P. können sich nun wohl drei L. vereinigen?

(Die Kinder werden finden, daß dies in einem, in zwei und in drei P. geschehen kann.)

Sagt mir, wie ich es anzufangen habe, um 3 L. in 2 P. zu vereinigen?

Kdr. Sie müssen zuerst zwei ungll. L. in einem P. verbinden, dann eine 3te L. ziehen, die mit einer dieser beiden L. zusammen trifft.

Lhr. (indem er nach dieser Vorschrift zeichnet und auf Fig. 1 hinweist). Ist's so recht? — Kdr. Ja!

Anmerkung. Es ist sehr zu empfehlen, daß der Lehrer öfters durch die Kinder angeben läßt, wie diese oder jene Verbindung von L. (Figur) gezeichnet werden muß? Das lehrt die Kinder Bestimmtheit im Ausdrucke; denn sollten sie sich unbestimmt ausdrücken, so würde er zwar so zeichnen, wie sie es angeben, aber wo möglich, unrichtig.

Lhr. Jetzt zeichnet auf eure Tafeln die andre Verbindung dreier L., wo sie nemlich in drei P. zusammen treffen. (s. Fig. 2.)

Lhr. Versucht jetzt, drei gerade Linien so zusammen zu stellen, daß sie sich in vier P. vereinigen.

(Die Kinder werden sogleich sich überzeugen, daß dies unmöglich ist.)

In wie vielen P. können also drei L. höchstens zusammen treffen?

Kdr. Höchstens in drei P.

Lhr. In wie vielen P. wenigstens?

Kdr. In einem P.

Lhr. Zeichnet das! (s. Fig. 3.)

Lhr. Jetzt seht zu, in wie vielen P. vier Linien verbunden werden können?

(Die Kinder werden finden, daß dies in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 P. geschehen kann.)

Anmerk. Sobald man die höchste Anzahl der Punkte gefunden hat, in der sich eine gegebene Zahl von L. verbinden lassen, so kennt man auch alle übrigen; denn alle zwischen dieser und 1 (letztere mit eingeschlossen) sind möglich. Um die höchste Anzahl von Punkten zu finden, darf man nur so schließen: Wenn in einer Figur jede nach und nach hinzukommende L. sich mit allen vorhergehenden verbunden hat, so muß sie die höchste Anzahl geben. Zwei L. verbinden sich nun in 1 Punkt, die dritte liefert mit den beiden vorhergegangenen L. 2 P., welche mit der ersten $2+1=3$ geben; die 4te L. giebt mit den 3 vorhergehenden L. 3 neue Durchschnittspunkte, welche mit den vorhandenen $3+2+1=6$ Punkte geben. Die 5te Linie giebt mit den 4 vorhergehenden L. 4 neue Durchschnittsp. Zusammen sind dies $4+3+2+1=10$ Punkte ꝛc.

Daher geben:

2 L. höchstens 1 Durchsch. P.
3 L. — $2+1=3$ D. P.
4 L. — $3+2+1=6$ D. P.
5 L. — $4+3+2+1=10$ D. P.
6 L. — $5+4+3+2+1=15$ D. P.
7 L. — $6+5+4+3+2+1=21$ D. P.

Acht L. würden sich daher in 1, 2, 3 bis 28 P. verbinden lassen.

IV. Stufe. Vereinigung mehrerer Linien in einem oder in mehreren Punkten, mit Rücksicht auf das Durchgehen der Linien durch den Vereinigungs-Punkt.

Lhr. (indem er Fig. 4 und 5 zeichnet.) Was haben wir hier vor uns?

Kdr. Zwei Paar L., wovon immer zwei sich in einem P. vereinigen.

Lhr. Richtig! — Aber welche Verschiedenheit findet dennoch bei beiden Statt?

Kdr. Bei dem einen Paar L. geht die eine L. über den V. P. hinaus, bei dem andern nicht.

Lhr. Das ist richtig. Wir wollen das künftig so ausdrücken: „die eine L. geht durch den V. P.“

Versucht jetzt, ob nicht beide L. durch den V. P. gehen könnten? (Die Kinder werden sogleich Fig. 7 zeichnen.)

Lhr. Richtig! hier gehen beide L. durch den V. P. Verbindet jetzt drei L. in drei P.

1) so, daß keine L. durch den V. P. geht (s. Fig. 2);
2) so, daß die eine L. durch den V. P. geht.
   (indem er Fig. 6a an die Tafel zeichnet).
   (Nachdem die Kinder dies gethan, gebe ihnen der Lehrer auf, alle möglichen Fälle aufzusuchen, wo die L. durch den V. P. gehen; sie werden dann folgende 10 Fig. zeichnen; s. Fig. 6a bis i.)
   (er lasse sie mit Buchstaben oder Zahlen bezeichnen).

Bei der 2ten gehet die eine L. durch zwei V. P. — Bei der 3ten gehen alle 3 L. jede durch einen V. P. — Bei der 4ten gehen 2 L. durch den nemlichen V. P. — Bei der 5ten gehen 2 L. durch einen gemeinschaftlichen V. P. und eine von diesen beiden L. geht auch noch durch einen zweiten V. P. — Bei der 6ten gehen 2 L., jede durch einen V. P. und 2 L. durch einen gemeinschaftlichen V. P. — Bei der 7ten gehen 2 L., jede durch zwei gemeinschaftliche V. P. Bei der 8ten ist das derselbe Fall; allein die eine L. geht auch noch durch den dritten V. P. — Bei der 9ten gehen alle 3 L., jede durch zwei gemeinschaftliche V. P.

V. Stufe. Bildung und Anzahl der Winkel bei Vereinigung von 2, 3 und 4 Linien in einem oder in mehreren Punkten.

Lhr. (indem er zwei ungll. L. an die Tafel zeichnet, die sich in einem P. vereinigen.) (s. Fig. 5.)

Da, wo sich, wie hier, zwei ungll. L. vereinigen, entsteht ein Winkel.

Seht jetzt zu, ob 2 L., die sich in einem P. vereinigen, immer nur einen W. bilden können?

Kdr. Sie können auch 2 und 4 W. bilden.

Lhr. Zeichne einer das auf die Wandtafel.

(Das Kind wird Fig. 4 und 7 zeichnen.)

Lhr. Es giebt also 3 Fälle. Seht zu, wie viel Fälle es in Hinsicht der Anzahl der W. geben kann, wenn man drei L. 1) in einem P. verbindet.

Kdr. Dann können sie 2, 3, 4, 5 und 6 W. bilden.

Lhr. Zeichne das jeder auf seine Tafel.

(Die Kinder werden dann Fig. 8a, b, c, d, und e auf die Tafeln zeichnen.)

2) In zwei P.

Lhr. Welches wird die größte Anzahl von W. seyn, die man durch Verbindung dreier L. in zwei P. bilden kann?

Kdr. Acht W. sind die größte Anzahl.

Lhr. Welches ist die kleinste Anzahl.

Kdr. Sie bilden wenigstens 2 W.

Lhr. Wer sagt mir, wie viele Fälle es überhaupt geben kann, in Absicht der Anzahl der W.? (s. Fig. 9a. bis f.)

3) In drei P.

3, 4, 5, 6, 7. 8, 9, 10 und 12 W. (s. Fig. 2, 6a, 6b, 6c, 6e, 6f, 6g, 6h, 6i.)

Sollten sie vielleicht Fig. 6d. und 6c. für verschiedene Fälle ansehen, und beide zeichnen, so hat der Lehrer sie nur darauf aufmerksam zu machen, daß zwar die Art der Verbindung verschieden; allein die Anzahl der W. dieselbe ist, nemlich 6, daß also beide Fälle in der Rücksicht, worauf es hier ankommt, gleich sind. Der Lehrer kann, wenn er es für zweckmäßig findet, auch noch die Verbindung von vier L. in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten vornehmen lassen.

Anmerk. In dem zuletzt gegebenen Beispiele fiel der Fall aus, wo 3 L. in 3 P. 11 Winkel geben sollten. Dieser Fall ist nicht möglich, kommt aber öfters als solcher vor, und ist dann jedesmal

1. der vorletzte, oder der vor der höchsten Anzahl der Winkel vorhergehende,
2. nur da nicht möglich, wo bei der höchsten Anzahl der Winkel um jeden Punkt 4 W. liegen. In allen andern Fällen fällt keine Zahl aus.

Die höchste Zahl der W., welcher mit einer gegebenen Anzahl von L. zu bilden sind, ist jedesmal das Vierfache der höchsten Zahl ihrer Durchschnittspunkte. Daher kann man mit 3 L. höchstens 12 W. bilden, mit 4 L. 24 W., mit 5 L. 40 W., mit 6 L. 60 W.

VI. Stufe. Anzahl der Winkel mit Rücksicht auf das Gleichlaufend- oder Ungleichlaufend-Seyn der Linien.

Lhr. Seht zu, wie viel W. man mit 2, 3 u. s. w. gleichlaufenden L. bilden kann?

Kdr. Gll. L. allein können keine W. bilden; denn sie treffen nie zusammen, wenn man sie auch noch so sehr verlängert.

Lhr. Wie viele ungll. L. muß ich also wenigstens zu einer oder mehreren gll. L. haben, um W. zu bilden.

Kdr. Wenigstens eine ungll. L.

Lhr. Wie viele W. werden 2 gll. und eine ungll. L. wenigstens bilden können? — Kdr. Zwei W.

Lhr. Wie viele höchstens? — Kdr. Acht.

Lhr. Wie viele L. gebrauche ich wenigstens, um 2 W. zu bilden, wenn 2 L. gll. seyn sollen?

Kdr. Dann gebrauche ich wenigstens 3 L.

Lhr. Wie viele L. wenigstens zu 3 W.?

Kdr. 3 L. (s. Fig. 2 oder 9b.).

Lhr. Wie viele L. braucht man wenigstens, um 12 W. zu bilden, wenn 2 L. gll. sind? — Kdr. Vier L. (s. Fig. 10.)

Jetzt gebt wohl Acht. Ich soll mit vier L., wovon zwei

gll. sind, 13 W. bilden, wie viele V. P. müssen da wenigstens Satt finden?

(Vielleicht finden die Kinder Fig. 11, sonst muß der Lehrer sie darauf führen.)

Aehnliche Aufgaben wird nun jeder Lehrer nach den Bedürfnissen seiner Schüler, und nach dem Maße der Zeit, die er darauf verwenden kann, selbst zu bilden wissen, wenn er diesen Gang bis hierher befolgt hat. Die Gränzen lassen sich nicht genau vorschreiben, und ängstliches Streben, sich genau an den Buchstaben zu halten, würde zum Mechanismus führen.

VII. Stufe. Schenkel der Winkel.

Lhr. (einen Winkel Fig. 5 an die Tafel zeichnend.) Der W. hier wird von 2 Linien gebildet; wir nennen sie, wenn sie einen W. bilden, Schenkel des W.

Wer kann zwei Winkel zeichnen, bei denen zwei Sch. zusammen nur eine und die nemliche L. bilden?

Kd. (indem es Fig. 12 an die Tafel zeichnet.) Hier! die eine L. dient zu Schenkeln für beide W.

Lhr. Richtig! haben diese beiden W. einen gemeinschaftlichen Schenkel?

Kdr. Ja! dieser gemeinschaftliche Schenkel ist die L., zu deren beiden Seiten die beiden W. liegen.

Lhr. Was für ein Unterschied findet zwischen den beiden L. Statt, welche die beiden W. bilden?

Kdr. Die eine ist ein Schenkel, der beiden W. gemeinschaftlich ist; — die andere giebt für jeden der beiden W. einen Schenkel her.

Bei der erstern liegen die beiden W. zu beiden Seiten der L. — Bei der andern liegen die beiden W. auf der nemlichen Seite der L.

Lhr. Richtig! Wenn ich nun die letztere verlängern würde, bekäme ich dann mehrere W.? — Kdr. Nein!

Lhr. Wenn ich aber die L. verlängere, die für 2 W. einen gemeinschaftlichen Sch. abgiebt, würden dann mehrere W. entstehen?

Kdr. Wenn ich die eine Linie nach der Seite hin, wo sie die andere L. berührt, verlängere, so entstehen 2 neue W.

Lhr. Zeigt das auf euren Tafeln! (s. Fig. 13.)

Lhr. Zu wie vielen W. dient jede von zwei L., die 2 W. bilden?

Kdr. Jede L. dient zu 2 W.

Lhr. (indem er Fig. 3 zeichnet.) Hier sind 3 L., die 2 W. bilden. Zu wie vielen W. dient jede von diesen 3 L.?

Kdr. Die eine L. dient zu beiden W. zugleich, jede der andern beiden L. dient nur zu einem W.

(Der Lehrer kann diese Ansicht weiter verfolgen, und auf 3 L., die sich in 2, 3 ꝛc. P. vereinigen, 3, 4, 5, 6 bis 8 W. bilden, ausdehnen.)

VIII. Stufe. Verschiedene Arten der Winkel.

Lhr. Zwei gerade L. können sich so schneiden, daß sie vier W. bilden. — Wir wollen jetzt einmal diese vier W., welche sie bilden können, etwas genauer anschauen. Kennt ihr diese Verbindung wohl so bewirken, daß sie vier gleiche W. bilden? (s. Fig. 7.)

Lhr. Richtig! Alle diese vier W. sind gleich; d. h. kein Sch. neigt sich zu dem einen Sch. mehr hin, als zu einem andern. Einen solchen W., dessen Sch. sich gleichen, nennen wir:

einen rechten W.

Könnt ihr mit zwei L. vier W. bilden, so daß nur 2 und 2 W. gl. werden? (s. Fig. 14.)

Lhr. Welche Verschiedenheit findet bei diesen 4 W. Statt?

Kdr. Zwei W. sind größer, zwei sind kleiner.

Lhr. Richtig! Wie steht es nun mit den Sch. der W.? neigen sie sich auf keine Seite weder mehr, noch weniger hin, wie vorher bei Fig. 7?

Kdr. Bei 2 W. neigen sich die Sch. mehr zu einander hin; bei den beiden andern entfernen sie sich mehr von einander, als vorhin.

Lhr. Wir wollen die Sch. mit Buchstaben bezeichnen. (indem er es wirklich thut, und es die Kinder auf ihren Tafeln thun läßt.)

Der Durchschnittts-Punkt der beiden L. soll a heißen, die 4 End-P. b, c, d, f. — Nennt mir einmal alle 4 Sch.!

Kdr. Sch. a b, Sch. a d, Sch. a f, Sch. a c.

Lhr. Nun wollen wir einmal einen Sch. auswählen; es ist gleich gut, welchen, wir wollen Sch. a b wählen, und seine Lage zu den Sch. der beiden W., zu denen er gehört, betrachten, welches werden diese beiden Sch. seyn?

Kdr. a d und a c.

Lhr. Richtig! Zu welchen dieser beiden Sch. neigt sich Sch. a b am meisten hin? — Kdr. Zu Sch. a d.

Lhr. Von welchem entfernt er sich am meisten?

Kdr. Von Sch. a c.

Lhr. Den W., dessen Sch. sich mehr zu einander hinneigen, als es bei dem rechten W. der Fall ist, nennen wir einen spitzen W.; den, bei dem sich die beiden Sch. mehr abneigen, als bei dem rechten W., nennen wir einen stumpfen W.

Lhr. Zeichnet 2 sp. W. von verschiedener Größe. (s. Fig. 15a und b.)

Lhr. Aber wie steht es mit den r. W.? Giebt es r. W. von verschiedener Größe?

Kdr. Nein! Alle r. W. sind einander gleich.

Lhr. (indem er Fig. 16 an die Tafel zeichnet.) Welcher W. ist hier der größte, der innere, oder der äußere?

(Sollte ein Kind sagen, der äußere W. sey der größere, so mache der Lehrer es darauf aufmerksam, das zwar die Sch. des äußern W. gr. sind, als die Sch. des innern W., daß aber die W. selbst vollkommen gleich sind; indem beides r. W. sind.)

Lhr. Was bestimmt also die Größe eines W.?

Kdr. Die Oeffnung der beiden Sch. bei gleicher Entfernung vom Scheitel-Punkte.

IX. Stufe. Neben-Winkel.

Lhr. (indem er Fig. 7 an die Tafel zeichnet.) Jetzt gebt wohl Acht!

Wie viele r. W. sind hier? — Kdr. Vier r. W.

Lhr. (indem er den einen Sch. der 4 W., z B. den auf der linken Seite, ganz weglöscht, da denn Fig. 17 stehen bleibt.) Wie viele W. sind jetzt noch hier? — Kdr. Zwei!

Lhr. Und was für W. sind es? — Kdr. Es sind r. W.

Lhr. Hier liegen 2 W. an einer Seite **neben** einander, daher nennt man sie

Neben-Winkel.

Was für 2 W. sind es? Kdr. Rechte W.

Lhr. Zeichnet mir einmal die L. so, daß der eine von den 2 N. W. ein rechter sey, der andere ein st. oder ein sp.

(Die Kinder werden es vielleicht versuchen, aber sich bald überzeugen, daß dies unmöglich ist, — nachdem sie diese Erfahrung gemacht, fahre der Lehrer fort.)

Lhr. Was ist also der N. W. eines **rechten** W. **immer**?

Kdr. Der N. W. eines **rechten** W. muß immer ein **rechter** W. seyn.

Lhr. (indem er Fig. 14 an die Tafel zeichnet.) Was für 4 W. haben wir hier? — Kdr. Zwei sp. und 2 st.

Lhr. (indem er einen Sch., z. B. den auf der linken Seite, weglöscht, da dann Fig. 4 stehen bleibt.) Wie viele W. haben wir jetzt noch?

Kdr. 2 W., einen st. und einen sp.

Lhr. Richtig; auch diese W. sind **Neben-Winkel**. Was für ein W. ist der N. W. eines st. W. — Kdr. Ein spitzer!

Lhr. Den ganzen Satz ausgesprochen!

Kdr. Der N. W. eines st. W. ist ein sp. W.

Lhr. Was ist der N. W. eines sp. W.?

Kdr. Der N. W. eines sp. W. ist ein st. W.

Lhr. Wir wollen noch einmal zusehen, wie **viele** und **welche** Arten von W. wir mit 2 L. bilden können. Verbindet zuerst die L. so, daß sie die **geringste** Anzahl von W. bilden.

(Die Kinder werden finden, daß man auf diese Art 1) **einen** rechten W. (Fig. 18), oder 2) **einen** sp. W. (Fig. 19), oder 3) **einen** st. W. (Fig. 20) bilden kann.)

(Fig. 18 kann auch so gezeichnet werden, daß der r. W. durch **schräge** L. gebildet wird, damit die Kinder

nicht auf den Irrthum fallen, als würden r. W. nur durch senkrechte und wagerechte L. gebildet.)

Lhr. Jetzt wollen wir den einen Sch. eines jeden dieser 3 W., von dem Scheitel-P. aus, verlängern, und dann sehen, was dadurch entsteht. Zuerst den einen Sch. des rechten W. (indem er es an der Tafel wirklich thut.) (s. Fig. 21.)

Kdr. Dann bekommen wir noch einen W. und zwar einen r.

Lhr. Wie nennen wir den W. in Beziehung auf den r. W., den wir vorher schon hatten?

Kdr. Es ist sein Neben-W.

Lhr. Richtig! Nun den st. W. (indem er einen Sch. desselben verlängert, aber diese Verlängerung nicht so stark zeichnet, als die Sch. des schon vorhandenen W., damit man beide unterscheiden kann.) (s. Fig. 22) Was ist jetzt geschehen?

Kdr. Der eine Sch. des st. W. ist verlängert worden.

Lhr. Was hat sich dadurch verändert?

Kdr. Es ist ein 2ter W. entstanden, und zwar ein sp.

Lhr. Was haben wir also hier? (auf Fig. 22 zeigend.)

Kdr. Ein Paar N. W., einen sp. und einen st.

Lhr. Richtig! Was wird geschehen, wenn ich den einen Sch. eines sp. W. vom Scheitel-P. aus verlängere?

Kdr. Dann giebt es einen N. W. und zwar einen st. (s. Fig. 23.)

X. Stufe. Scheitel-Winkel.

Lhr. Bisher hatten wir nur einen Sch. eines W. verlängert, so daß wir 2 N. W. bekamen; jetzt wollen wir auch den andern Sch. verlängern. Zuerst (indem er Fig. 17 auf die Tafel zeichnet, aber alle drei Sch. gleich stark) hier bei dem r. W. (indem er den andern Sch. wirklich verlängert, aber die Verlängerung etwas schwächer zeichnet.) (Fig. 24.)

Was ist durch diese Verlängerung des 2ten Schenkels geschehen?

Kdr. Es sind zwei neue W. entstanden.

Lhr. Was für W.? — Kdr. R. W.

Lhr. Wie viele rechte W. haben wir also jetzt?

Kdr. Vier r. W.

Lhr. Die zwei W. — von den vieren, die dadurch entstanden sind, daß sich zwei L. schnitten oder durchkreuzten — die einander gegenüberstehen, nennt man

Scheitel-Winkel.

Den P., wo sie sich durchkreuzen, den

Scheitel-Punkt.

Wie viele Paare von Scheitel-W. entstehen also durch diese Verbindung? — Kdr. Zwei Paare.

Lhr. (indem er die 4 W. mit Buchstaben bezeichnet). Welches sind hier die Sch.W.? — Kdr. a und b, c und d.

Lhr. Richtig! Aber wie viele Paare Neben-W. haben wir bei dieser Verbindung?

Kdr. Auch zwei Paare, ad und bc.

Lhr. Kann ich a und c nicht auch als zwei N.W betrachten? — Kdr. Ja! und eben so b und d.

Lhr. Also haben wir vier Paare N.W. (indem er Figur 26 an die Tafel zeichnet.) Wie viele Paare Scheitel-W.?

Lhr. (auf Fig. 25 hinzeigend.) Was war der Scheitel-W. eines rechten W.?

Kdr. Der Sch.W. eines rechten W. ist ein r. W.

Lhr. (auf Fig. 26a hinzeigend) was ist der Sch.W. eines st. W.? — Kdr. Der Sch.W. eines st. W. ist ein st. W.

Lhr. Und was der Sch.W. eines sp. W.? (auf Fig. 26b hinzeigend.)

XI. Stufe. Gegen-Winkel.

Lhr. (Indem er Figur 9a oder 27a an die Tafel zeichnet.) Wie viele W. sind hier? — Kdr. Zwei W.

Lhr. Wodurch unterscheiden sich wohl diese beiden W. von den N.W.?

Kdr. Die N.W. liegen neben einander.

Die G.W. liegen einander gegenüber.

Lhr. Daher nennt man diese W., weil sie sich gegenüber liegen, auch

Gegen-Winkel.

Wodurch unterscheiden sich beide noch weiter?

Kdr. Die N. W. haben nur einen und zwar einen gemeinschaftlichen Scheitel-Punkt.

Die G. W. haben zwei Scheitel-P.

Die N. W. werden von zwei L. gebildet.

Die G. W. werden von drei L. gebildet.

Lhr. Wenn ich in dieser Figur (9a) diejenige Linie, welche zweimal geschnitten wird, nach beiden Seiten verlängere, so entstehen mir zwei neue Winkel. Sie sind die Nebenwinkel der vorigen, und liegen auch einander gegenüber; darum heißen sie ebenfalls Gegenwinkel. Um sie jedoch von den vorigen zu unterscheiden, nennt man sie äußere Gegenwinkel, jene aber innere Gegenwinkel. Welches sind daher die Nebenwinkel der äußern Gegenwinkel?

Kdr. Die innern Gegenwinkel, und diese sind wieder die Nebenwinkel der äußern Gegenwinkel.

Lhr. Seht jetzt zu, wie viele verschiedene Fälle es bei den G. W. geben kann, in Hinsicht auf die Art der W., ob es nemlich r., st. oder sp. sind? Es müssen jedoch gleichl. L. seyn.

(Die Kinder werden Fig. 27a und b zeichnen.)

Lhr. Könnte es nicht zwei st. G. W geben?

Kdr. Ja, ein innerer und ein äußerer.

Lhr. Nicht beide innere, oder beide äußere?

Kdr. Nein!

Lhr. Warum nicht?

Kdr. Dann wären die L. nicht gll.

Lhr. Vielleicht aber einen r. und einen sp.?

Kdr. Nein! dann könnten die L. wieder nicht gll. seyn.

XII. Stufe [a]). Wechsel-Winkel.

Lhr. (indem er Fig. 28a an die Tafel zeichnet.) Sind dies auch G. W.? — Kdr. Nein!

Lhr. Wodurch unterscheiden sie sich wohl von den G. W.?

Kdr. Die beiden W. liegen zu beiden Seiten des Sch., der beiden gemeinschaftlich ist; bei den G. W. aber liegen

sie an einer und der nemlichen Seite, die beiden W. gemein ist.

Lhr. Diese Art von W. nennt man — weil sie an abwechselnden Seiten liegen —

Wechsel-Winkel.

Wenn ich auch hier wieder, wie vorher, diejenige L., welche zweimal geschnitten wird — also in unserer Zeichnung die wagerechte — nach beiden Seiten verlängere, so entstehen abermals ein Paar Nebenwinkel zu den vorigen. Auch sie liegen an abwechselnden Seiten einer und derselben Linie, wir werden sie daher ebenfalls Wechsel-Winkel nennen müssen. Wodurch unterscheiden wir aber wohl beide von einander?

Kdr. Diese letzteren werden wir äußere W. W. nennen, die vorigen aber innere W. W.

Lhr. Recht! Und die äußern W. W. sind wieder die N. W. von welchen Winkeln?

Kdr. Von den innern W. W. und diese sind die N. W. der äußern W. W.

Lhr. Seht jetzt, wie viel Fälle bei W. W. Statt finden können, in Hinsicht der Art der W. Doch müssen zwei L. wieder gll. seyn. (s. Fig. 28a, b, c.)

XII. Stufe [b]). Zusammenhang der Winkel unter einander.

Lhr. (Zeichnet die Figur 46 auf die Tafel.) In dieser Figur haben wir alle Arten der Winkel, die wir bisher kennen gelernt haben. Wir wollen sie nach einander aufsuchen. Wie viele Paare von Nebenwinkeln haben wir?

Kdr. Acht Paare, a und b, b und d, d und c, c und a, e und f, f und g, g und h, h und e.

Lhr. Wie viel Paare von Scheitelwinkeln?

Kdr. Vier Paare, a und b, b und c, e und g, f und h.

Lhr. Wie viel Paare von äußern Gegenwinkeln?

Kdr. Zwei Paare, b und e, d und h.

Lhr. Und wie viel Paare innerer Gegenwinkel?

Kdr. Eben so viele, a und f, c und g.

Lhr. Wie viel Paare äußerer Wechselwinkel?

Kdr. Auch zwei Paare, b und h, e und d.

Lhr. Und wie viel Paare innerer Wechselwinkel?

Kdr. Abermals zwei Paare, a und g, f und c.

Lhr. Wenn die äußern Wechselwinkel stumpfe W. sind, was für welche sind die innern W. W.? — Kdr. Spitze W.

Lhr. Warum?

Kdr. Weil die innern W. W. die Nebenwinkel der äußeren sind. Der Neben-W. eines stumpfen W. ist aber ein spitzer W.

Lhr. So wird es sich auch umgekehrt verhalten, wenn die äußern W. W. spitze W. sind. Was für W. sind aber die innern Gegenwinkel, wenn die äußern G. W. stumpf sind?

Kdr. Die äußern Gegenwinkel können nicht beide stumpf seyn, wenn die L. gll. sind. Wenn der eine stumpf ist, muß der andere spitz seyn.

Lhr. Richtig! Wie sind nun in diesem Falle die innern G. W.?

Kdr. Der eine ist ebenfalls spitz, und der andere stumpf.

Lhr. Warum?

Kdr. Die innern G. W. sind die N. W. der äußern. Wären nun beide innere G. W. stumpf, so müßte der eine davon der Nebenwinkel des stumpfen äußern Gegenwinkels seyn, dann wären zwei N. W. stumpf, welches nicht Statt finden kann. Wären beide spitz, so würden wir eben so zwei spitze N. W. erhalten, welches ebenfalls nicht möglich ist. Der eine muß daher spitz, der andere stumpf seyn.

Lhr. Gut. Wenn nun ein Paar Scheitelwinkel stumpf sind, wie sind die übrigen Paare der Sch. W.?

Kdr. Es findet sich dann noch ein Paar stumpfe Scheitelwinkel, welche jedoch nicht die Nebenwinkel der vorigen sind. Die beiden andern Paare sind spitz.

Lhr. Richtig! Und wenn ein Winkel stumpf ist?

Kdr. So ist sein Scheitelwinkel, und sein Wechselwinkel und dessen Scheitelwinkel ebenfalls stumpf. Die Nebenwinkel aller dieser W. aber sind spitz. Es sind daher vier stumpfe und vier spitze W.

Lhr. Ganz recht. Was folgt daraus für den Fall, wenn ein Winkel ein rechter ist?

Kdr. Daß alle W. rechte W. sind. (Der Grund davon ist leicht anzugeben.)

XII. Stufe *). Nähere Entwickelung der Neben- und Scheitelwinkel.

Lhr. Wir wollen jetzt sehen, ob wir im Stande sind, von den Winkeln, welche wir bisher kennen gelernt haben, richtige Beschreibungen zu geben. Weiß jeder, was Nebenwinkel, Scheitelwinkel ꝛc. sind? — Kdr. O ja!

Lhr. Nun, was sind Nebenwinkel?

Kdr. Es sind solche W., welche neben einander liegen.

Lhr. (zeichnet die Fig. 27b an die Tafel.) Etwa so?

Kdr. Nein! das sind Gegen-W., die liegen einander gegenüber.

Lhr. Warum denn? — Sie sind ja durch nichts getrennt, und ich kann sie auch noch näher an einander rücken. (Er thut dies.) — Warum liegen sie nun nicht neben einander?

Kdr. Ja, neben einander liegen sie wohl, aber es sind doch keine Nebenwinkel.

Lhr. Ihr werdet mir also wohl eine andere Erklärung davon geben müssen. Nehmt auf die Theile Rücksicht, woraus ein Winkel besteht. Welche sind diese?

Kdr. Schenkel und Scheitelpunkt.

Lhr. Wenn mehrere W. da sind, haben wir auch die Lage der Sch. zu beachten. Erklärt mir jetzt die N:W. durch die Angabe dieser Theile.

Kdr. N.W. sind solche W., welche einen gemeinschaftlichen Schenkel haben.

Lhr. Eure Erklärung ist nicht besser als die erste. (Er zeichnet Fig. 27b und 28a an die Tafel.) Seht einmal, ob sie nicht auch für diese W. paßt?

Kdr. Ja, das sind aber doch keine N.W.

Lhr. Wo liegt denn der Unterschied?

Kdr. Diese haben zwei Scheitelpunkte, die N.W. aber nur einen.

Lhr. Nehmt das mit in eure Erklärung auf.

Kdr. N.W. sind solche W., welche einen gemeinschaftlichen Schenkel und einen Scheitelpunkt haben.

Lhr. (zeichnet Fig. 3 an die Tafel.) Seht zu ob eure Erklärung paßt.

Kdr. Ja; sind denn das auch N.W.?

Lhr. Man hat sie manchmal auch so genannt, weil sie neben einander liegen. Wir wollen aber nur diese (er zeichnet Fig. 12 an die Tafel) so nennen. Paßt eure Erklärung darauf? — Kdr. Ja!

Lhr. Wodurch unterscheiden sich diese von den vorigen?

Kdr. Zwei Schenkel bilden hier eine gerade L.

Lhr. Richtig! Dies wollen wir noch mit in die Erklärung aufnehmen. Wie lautet sie nun?

Kdr. N.W. sind solche W., welche einen gemeinschaftlichen Schenkel und Scheitelpunkt haben, und deren andere beide Schenkel eine gerade L. bilden.

Lhr. Richtig! Darum nennt man sie auch: N.W. auf einer geraden Linie. Wer kann mir nun auf eine ähnliche Weise angeben, was Scheitelwinkel sind? —

Kdr. Scheitelwinkel sind solche W., welche einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt, aber keinen gemeinschaftlichen Schenkel haben.

Lhr. (zeichnet die Fig. 36 an die Tafel.) Hier sind zwei W., welche einen gemeinschaftlichen Sch.P. und keinen gemeinschaftlichen Schenkel haben, die aber doch keine Scheitelwinkel sind.

Kdr. Hier liegen die L. auch nicht, wie sie liegen müssen.

Lhr. Wie müssen sie denn liegen? — Drückt es mit Worten aus.

Kdr. Die Schenkel des einen W. müssen mit den Schenkeln des andern W. gerade L. bilden.

Lhr. Gut! Wie wird die Erklärung nun heißen?

Kdr. Scheitelwinkel sind solche W., welche einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben, und deren Schenkel miteinander gerade Linien bilden.

Lhr. Eure Erklärung ist noch nicht genau; denn sie paßt auch auf die Nebenwinkel. (Er zeichnet Fig. 12 an die Tafel.)

Kdr. Ja, hier ist aber ein gemeinschaftlicher Schenkel.

Lhr. Freilich. Die Schenkel bilden aber doch miteinander gerade Linien.

Kdr. Bei den Scheitelwinkeln ist aber kein Schenkel gemeinschaftlich.

Lhr. Darum müßt ihr das mit in die Erklärung aufnehmen. Wie wird sie jetzt lauten?

Kdr. Scheitelwinkel sind solche W., welche einen gemeinschaflichen Scheitelpunkt, aber keinen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren Schenkel miteinander gerade Linien bilden.

XII. Stufe [d]). Nähere Entwickelung der Gegen- und Wechsel-Winkel.

Lhr. Seht einmal, ob ihr mir nun auch eine Erklärung von den Gegenwinkeln geben könnt.

Kdr. Das sind solche, die einander gegenüber liegen.

Lhr. Das könnte man wohl von den Wechsel-W. auch sagen; denn der eine liegt rechts und der andre links von der L., also auch gegenüber. Macht die Erklärung nur der vorigen ähnlich. Wir wollen übrigens nur diejenigen Gegenwinkel mit diesem Namen belegen, wo zwei L. gll. sind.

Kdr. Sollen wir äußere oder innere G.W. nehmen?

Lhr. Versucht es einmal, eine Erklärung zu geben, die auf beide anwendbar ist.

Kdr. Gegenwinkel sind solche W., welche zwei Scheitelpunkte haben; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen in eine L. zusammen.

Lhr. Eure Erklärung paßt nur für die innern G.W., aber außerdem auch für die innern Wechsel-W. — Sie ist also noch zu unbestimmt.

Kdr. Die Winkel liegen nur auf einer Seite des gemeinschaftlichen Schenkels.

Lhr. Dadurch schließen wir allerdings die W.W. aus; aber eure Erklärung läßt sich nicht auf die äußeren G.W. anwenden.

Kdr. Bei den äußeren G. W. ist kein gemeinschaftlicher Schenkel.

Lhr. Das ist richtig. Wenn wir nun eine Erklärung geben wollen, die auf beide paßt, wie muß sie lauten?

Kdr. G. W. sind solche W., welche zwei Scheitelpunkte haben; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen entweder in eine L. zusammen, oder nicht, und die W. liegen auf einer und derselben Seite dieser letztern Schenkel.

Lhr. (zeichnet Taf. XV. Fig. 67 an die Tafel.) Hier ist eine Figur, auf welche eure Erklärung vollständig paßt; und doch sind dies keine äußeren G. W.

Kdr. Ja, hier ist der Schenkel des einen Winkels nicht wie der des andern.

Lhr. Das ist nicht deutlich ausgedrückt.

Kdr. Er liegt nicht eben so.

Lhr. Ihr wollt sagen: er liegt nicht in derselben Richtung. Muß er das?

Kdr. Ja, sonst sind es keine G. W.

Lhr. Davon habt ihr in eurer Erklärung nichts gesagt. Ihr sagtet nur: diese beiden Schenkel fielen entweder in eine L. zusammen, oder nicht. Hier fallen sie nicht in eine L. zusammen.

Kdr. In eine Richtung müssen sie aber zusammen fallen.

Lhr. Jetzt wird eure Erklärung richtiger werden.

Kdr. G. W. sind solche W., welche zwei Scheitelpunkte haben; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen in eine Richtung, die gll. Schenkel liegen jedoch an einer und derselben Seite der beiden andern Schenkel.

Lhr. Gut! Wodurch unterscheiden sich nun die äußeren und inneren Gegenwinkel?

Kdr. Bei den inneren G. W. fallen zwei Schenkel in eine L. zusammen, bei den äußeren nicht; bei den erstern liegen sie außerhalb, bei den andern innerhalb der gll. Linien.

Lhr. Was für W. sind daher äußere G. W.? —

Kdr. Solche, die zwei Scheitelpunkte haben; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen außerhalb dieser gll. Linien — oder der Scheitelpunkte — in eine und dieselbe Richtung; die gll. Schenkel liegen jedoch an einer und derselben Seite der beiden andern Schenkel.

Lhr. Und äußere G.W. sind? —

Kdr. Solche, die zwei Sch.P. haben; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen innerhalb dieser gll. Linien — oder der Scheitelpunkte — in eine und dieselbe Linie zusammen; die gll. Schenkel liegen jedoch an einer und derselben Seite der beiden andern Schenkel.

Lhr. Gut! Wir haben vorhin gesehen, daß die unvollständigen Erklärungen auch auf die Wechselwinkel paßten. Daher wird es nur nöthig seyn, die vollständige abzuändern, um sie auch auf die Wechsel-W. anwenden zu können. Sehet einmal, ob unsere allgemeine Erklärung von G.W. auf die Wechsel-W. paßt.

Kdr. Zwei Scheitelpunkte sind auch hier; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen in eine Richtung. Das alles ist wie bei den G.W. — Aber die gll. Schenkel liegen an verschiedenen Seiten der beiden andern Schenkel.

Lhr. Richtig! Also nur darin liegt die Verschiedenheit. Jetzt gebt mir einmal die Erklärungen von äußeren und inneren W.W.

Kdr. Aeußere W.W. sind solche, welche zwei Scheitelpunkte haben; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen außerhalb dieser gll. Linien in eine und dieselbe Richtung; die gll. Schenkel liegen aber an verschiedenen Seiten der beiden andern Schenkel.

Innere W.W. sind solche, welche zwei Scheitelpunkte haben; zwei Schenkel sind gll., die beiden andern fallen innerhalb dieser gll. Linien in eine und dieselbe Linie zusammen; die gll. Schenkel liegen aber an verschiedenen Seiten der beiden anderen Schenkel.

XIII. Stufe. Verbindung von 3, 4 und 5 Linien in 1, in 2 und mehreren Punkten, in Rücksicht der Art der Winkel.

Lhr. Verbindet 3 L. in einem P. so, daß sie die geringste Anzahl von W. bilden. Wie viele Fälle wird es da geben, in Hinsicht der Art der W.?

a) 1 r., 1 sp. (s. Fig. 29); b) 1 st., 1 sp.; c) 2 sp.

Lhr. Kann es nicht auch zwei rechte W. geben?

Kdr. Nein!

Lhr. Warum nicht?

Kdr. Dann würden 2 Sch. in eine L. fallen; es würden nur 2 L. bleiben, was gegen die Bedingung ist.

Lhr. Verbindet jetzt 3 L. in einem P. so, daß sie drei W. bilden, jedoch so:

1) daß keine L. durchgehet.

(Es giebt 3 Fälle, a) 3 st. W. (s. Fig. 30); b) 1 r., 2 st.; c) 1 sp., 2 st. W.)

2) so, daß eine L. durchgeht.

a) 1 r., 2 sp. (s. Fig. 31); b) 1 st., 2 sp.; c) 3 sp. W.

Lhr. Verbindet 3 L. in einem P. so, daß sie vier W. bilden, wie viele verschiedene Fälle werden dann Statt finden?

(Die Kinder werden hier 2 Fälle finden:

a) 2 r., 1 st., 1 sp. W. (s. Fig. 32.)

b) 2 st. und 2 sp. W.)

Lhr. Verbindet 3 L. in 1 P. so, das sie fünf W. bilden? (Hier werden die Kinder 5 Fälle finden.)

Lhr. Verbindet 3 L. in 1 P. so, das sie sechs W. bilden. (Hier werden die Kinder 3 Fälle finden:

a) 2 r., 4 sp.; b) 2 st., 4 sp.; c) 6 sp. W.)

Lhr. Verbindet 3 L. in zwei P. so, daß sie drei W. bilden, und seht zu, wie viele Fälle es geben kann, die in Ansehung der Art der W. verschieden sind: 1) bei 2 gll. L.

a) 3 r. W.; b) 2 st., 1 sp.; c) 2 sp., 1 st. W.

2) Bei ungll. L. (5 Fälle.)

Lhr. Jetzt verbindet 3 L. in 2 P. so, daß sie vier W. bilden, und sehet, wie viele Fälle in Hinsicht der Art der W. Statt finden.

1) Bei gll. L.

a) 4 r. W., b) 2 st., 2 sp. W.

2) Bei ungll. L.

a) 2 r., 1 st., 1 sp. W.; b) 2 st., 2 sp. W.

Lhr. Warum nicht auch 4 r. W.?

Kdr. Weil dann 2 L. gll. seyn müßten; das ist gegen die Bedingung.

Lhr. Verbindet 3 L. in 2 P. so, daß sie fünf W. bilden; wie viele Fälle wird es geben, in Absicht auf die Art der W.

a) wenn 2 L. gll. sind.

a) 5 r. (Fig. 35); b) 3 st., 2 sp.; c) 3 sp., 2 st.

b) wenn keine L. gll. ist.

Kdr. Wenn keine L. gll. ist, so kann man mit 3 L., die sich in 2 P. verbinden, so daß sie 5 W. bilden, 5 verschiedene Fälle auffinden.

Lhr. Verbindet jetzt 3 L. in 2 P., so daß sie sieben W. bilden.

(Die Kinder werden sogleich einwenden, daß das unmöglich ist.)

Also verbindet sie so, daß sie acht W. bilden.

(Hier giebt es bei 2 gll. L. 2 Fälle, und bei 2 ungll. L. auch 2 Fälle.)

Lhr. Verbindet jetzt vier L. in einem P. so, daß sie die geringste Anzahl von W. bilden.

Kdr. Vier L., die in einem P. verbunden sind, bilden wenigstens drei W.

Lhr. Wie viele Fälle kann es bei dieser Verbindung geben, in Absicht auf die Art der W.?

Kdr. 3 Fälle: 1 r., 2 sp.; 1 st., 2 sp.; 3 sp. W.

Lhr. Können 4 L., die sich in 1 P. verbinden, doch so, daß keine Linie über den V. P. hinausgeht, auch mehr als 3 W. bilden? — Kdr. Sie können vier W. bilden.

Lhr. Zeichnet nun die verschiedenen Fälle, die es hier geben kann, auf eure Tafeln.

a) 2 r., 1 st., 1 sp. (Figur 36); b) 1 r., 2 st., 1 sp.; c) 1 r., 1 st., 2 sp.; d) 3 st., 1 sp.; e) 2 st. 2 sp.; f) 1 st., 3 sp.

Lhr. Verbindet 4 L. in 1 P. so, daß eine L. über den V. P. hinausgeht, und 4 W. gebildet werden (s. Figur 37).

Lhr. Verbindet ꝛc., so daß sie 5, 6, 7, 8 W. bilden, und sucht, wie viele Fälle es geben kann, in Absicht auf die verschiedene Art der W.

Lhr. Verbindet 4 L. in zwei P., so daß sie die kleinstmögliche Anzahl von W. bilden.

a) so daß 2 L. gll. sind.
(Sie müssen wenigstens drei W. bilden [s. Figur 38], es giebt 7 Fälle.)
b) so daß keine L. gll. ist (6 Fälle).

Lhr. Jetzt verbindet 4 L. in 2 P. so, daß sie vier W. bilden, jedoch so, daß keine L. über den V. P. hinausgeht.

a) so daß 2 L. gll. sind (s. Figur 39);

Zuweilen möge der Lehrer einen einzelnen Fall ausheben, und den Kindern aufgeben, ihn zu zeichnen, z. B. hier den Fall, wo 3 st. und 1 r. W. gebildet werden. (s. Fig. 40.)

Lhr. Verbindet 4 L. in 2 P. so, daß eine L. über den V. P. hinausgeht, und sie vier W. bilden. (s. Figur 41.)

Verbindet 4 L. in 2 P. so, daß sie 5, 6, 7, 8, 9, 10 W. bilden.

Verbindet 4 L. in drei P. so, daß sie die geringste Anzahl von W. bilden.

a) so daß 2 Paar Linien gll. sind (s. Figur 42);
b) so daß nur 2 L. gll. sind;
c) so daß keine L. gll. ist.

Verbindet 4 L. in drei P. so, daß sie 4, 5, 6, 7 u. s. w. bis 12 W. bilden.

(Die Verbindung von drei L. in 3, und von vier L. in 4 P. wird absichtlich übergangen, weil dadurch geschlossene Figuren gebildet werden, die weiter unten noch besonders vorkommen.)

Die Verbindung von 5 L. wird füglich übergangen.

XIV. Stufe. Betrachtung eines und desselben Winkels, unter verschiedenen Rücksichten.

Lhr. (indem er Figur 43 an die Tafel zeichnet.) Wir wollen einmal diese Figur hier etwas genauer betrachten. Wie viele W. sind hier? — Kdr. 3 W.

Lhr. Als was erscheint uns der W. a, wenn wir ihn in Beziehung auf W. c betrachten?

Kdr. Wenn wir den W. a rc., so erscheint er als N. W. des W. c.

Lhr. Als was erscheint uns W. a aber, wenn wir ihn in Beziehung auf W. b anschauen?

Kdr. Wenn ꝛc. so erscheint uns W. a als Gegenwinkel des W. b.

Lhr. In wie vielen Eigenschaften haben wir also den W. a betrachtet?

Kdr. Wir haben W. a in doppeltet Eigenschaft betrachtet, als N.W. und als G.W.

Lhr. Können wir W. b auch in doppelter Eigenschaft betrachten?

Kdr. Ja, W. b ist G.W. des W. a und W.W. des Winkels c.

Lhr. Und W. c.?

Kdr. W. c ist W.W. des W. b und N.W. des W. a.

Lhr. (indem er Figur 44 an die Tafel zeichnet.) Wir wollen nun diese Verbindung hier betrachten; wie viele Paare N.W. sind hier?

Kdr. Zwei Paare N.W. a und b, c und d.

Lhr. Wie viele Paare G.W.?

Kdr. Zwei Paare G.W. a und c, b und d.

Lhr. Wie viele Paare W.W.?

Kdr. Zwei Paare W.W. a und d, c und b.

Lhr. Richtig! Jetzt wollen wir einen einzelnen W. ausheben; welchen soll ich wählen? — Kdr. W. a.

Lhr. Diesen W. a kann ich nun in einer dreifachen Eigenschaft anschauen:

1) als N.W., 2) als G.W., 3) als W.W.

Welches ist der N.W. des W. a?

Kdr. W. b ist der N.W. des W. a.

Lhr. Welchen W. hat W. a zum G.W.?

Kdr. W. a hat den W. c zum G.W.

Lhr. Was für ein M. ist W.W. des W. a?

Kdr. W. d ist der W.W. des W. a.

Lhr. Wir wollen jetzt unser Augenmerk auf eine andere Verbindung dreier L. richten (indem er Figur 45 an die Tafel zeichnet). Was kann W. a seyn? Oder als was kann ich den W. a anschauen?

Kdr. W. a kann ich anschauen:

1) als N. W. von W. b und e,
2) als G. W. von W. c,
3) als Sch. W. von W. d.

Lhr. Nicht auch als W. W.? — Kdr. Nein!

Lhr. Welche W. können als W. W. angeschaut werden?

Kdr. Die beiden W. b und c.

Lhr. Welche W. dienen zu G. W.?

Kdr. Die W. a und c.

(Der Lehrer kann einen 3ten Fall ausheben, z. B. den, wenn 2 L. gll. und so verbunden sind, daß sie 4 sp. und 4 st. W. bilden.) (s. die Figur 46.)

Eben so können nun auch äußere und innere Gegen- und Wechselwinkel mit in die Betrachtung gezogen werden, so, daß z. B. W. b erscheint: als N. W. von a und d, als Sch. W. von c, als äußerer G. W. von e, als äußerer W. W. von h u. s. f.

Durch diese Art der Behandlung des Gegenstandes wird bezweckt:

1) Bewahrung des Lehrlings vor Einseitigkeit.
2) Gewöhnung desselben, einen und denselben Gegenstand von allen Seiten zu betrachten, ohne sich durch mehrfache Gegenstände irre machen zu lassen.

XV. Stufe. Verschiedene Arten der W. bei geschlossenen Figuren, die durch 3 und 4 Linien gebildet werden.

Lhr. Verbindet 3 L. in 3 P. so, daß sie die geringste Anzahl von W. bilden. (Die geringste Anzahl von W. ist 3.)

Lhr. Sucht nun, wie viele und welche Fälle es geben kann, in Absicht auf die Art der W.?

a) 1 r. und 2 sp. W. (s. Figur 47.)
b) 1 st., 2 sp. W. (s. Figur 48.)
c) 3 sp. W. (s. Figur 49.)

Lhr. Nicht auch zwei r. und 1 sp. W.?

Kdr. Nein, das geht nicht!

Lhr. Warum nicht?

Kdr. Wenn 2 r. W. vorhanden wären, so müßten 2 L. gll. seyn; diese könnten niemals zusammen kommen, es fehlte also der 3te V. P.

Lhr. Diese 3 Linien schließen Flächen ein, deren jede 3 Ecken hat — man nennt die Figuren Dreiecke (indem er nun auf das rwkl. Dr. zeigt). Was für ein W. findet sich hier in diesem Dr., der in den andern Dr. nicht vorkommt?

Kdr. Ein rechter W.

Lhr. Daher nennen wir das Dr.

ein rechtwinkliches Dreieck.

(auf das stumpfwinkliche Dr. Figur 48 zeigend.) Wie werden wir dies Dr. hier nennen?

Kdr. Ein stumpfwinkliches Dr.

Lhr. Und dies hier? (auf Figur 49 zeigend.)

Kdr. Ein spitzwinkliches Dr.

Lhr. Jetzt wollen wir 4 L. in 4 P. verbinden, so daß sie die geringste Anzahl von W. bilden.

Kdr. 4 L., die sich in 4 P. vereinigen, bilden wenigstens 4 W.

Lhr. Sucht die verschiedenen Fälle auf, die Statt finden können in Hinsicht der Art der W.

(Es giebt acht verschiedene Fälle.)

a) 4 r. W. (s. Fig. 50); b) 2 st., 2 sp. (s. Fig. 52 und 57); c) 1 r., 1 st., 2 sp.; d) 2 r., 1 st., 1 sp. (s. Figur 56); e) 1 r., 2 st., 1 sp. (s. Fig. 55); f) 1 st., 3 sp. (s. Figur 20, Taf. IV. — Die Figur kann auch Aehnlichkeit mit Figur 16, Taf. IV haben); g) 1 r., 3 sp. (ähnlich der Fig. 20, Taf. IV); h) 4 sp. W. (s. Figur 18, Taf. IV).

XVI. Stufe. Gleichheit und Ungleichheit der Seiten geschlossener Figuren.

Lhr. Können wohl alle S. eines Dr. gleich seyn?

(Die Kinder werden wahrscheinlich diese Frage bejahen, aber ohne den Grund angeben zu können; der Lehrer komme ihnen daher auf folgende Art zu Hülfe.)

(indem er eine L. ab (s. Fig. 51 a) an die Tafel zeichnet.) Das ist jetzt eine L., welche für das Dr., das wir zeichnen wollen,

die eine S. abgeben soll. (Indem er jetzt die beiden S. ac und bc (s. Fig. 51c) durch punktirte L. andeutet.) Ist jede dieser S. ac und bc wohl so groß, als die L. ab?

Kdr. Nein! Jede von beiden S. ist kleiner, als ab.

Lhr. (indem er die beiden S. af und bf mit punktirten L. andeutet, die unter einem sehr spitzen W. zusammen kommen.) (s. Figur 51c.) Wie steht es mit diesen beiden S.? Sind sie eben so groß, oder größer, als S. ab?

Kdr. Sie sind größer, als S. ab.

Lhr. Zwischen beiden L. nun, zwischen denen, die größer sind, und denen, die kleiner sind, als ab, muß es 2 L. geben, die gleich ab sind, und das sind hier (auf Fig. 51c zeigend) die beiden L. ad und bd. (Wir würden sie erhalten, wenn wir ab und cb vergrößern, oder wenn wir af und bf verkleinern wollten.) Wir nennen dies Dr. ein gleichseitiges. Hieraus folgt, daß ein Dr. drei gleiche S. haben kann. (Dr. abc an die Tafel zeichnend.) Wird das Dr. abc ein gleichseitiges seyn? — Kdr. Nein!

Lhr. Warum nicht?

Kdr. Es hat nur zwei gleiche und eine ungleiche S.

Lhr. Richtig! Ein solches Dr., das zwei gleiche S. und eine ungl. S. hat, nennen wir, weil ein W. desselben 2 gleiche Sch. hat, ein gleichschenkliches Dr.

Lhr. Zeichne jeder einige glsch. Dr. — Wie können wir diese glsch. Dr. wohl wieder eintheilen, nach Beschaffenheit der Art der W.?

Kdr. In recht-, stumpf- und spitzwinkliche.

Lhr. Richtig! Kann es wohl Dr. mit drei ungleichen S. geben? — Kdr. Ja!

Lhr. Zeichnet zuerst ein rechtw., dann ein stumpfw. und zuletzt ein spitzw. ungleichs. Dr. (s. Fig. 47, 48, 49.)

XVII. Stufe. Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten bei vierseitigen Figuren, mit Rücksicht auf die Art der Winkel.

Lhr. (indem er Figur 50 an die Tafel zeichnet.) Was bemerkt ihr an dieser Figur?

Kdr. Sie hat vier gleiche S.

Lhr. (indem er Figur 52 an die Tafel zeichnet.) Sind hier nicht auch alle vier S. gleich?

Lhr. Worin sind beide verschieden?

Kdr. Dort waren auch alle vier W. gleich — es sind r. W.; hier sind nur immer zwei W. gleich. Dort sind alle vier W. rechte W.; hier sind 2 st. und 2 sp. W.

Lhr. Die erste Fig. nennt man Quadrat. Die zweite Fig. Raute oder Rhombus. — Beschreibt jetzt ein Qu. durch W.

Kdr. Ein Qu. hat 4 S., die vier r. W. bilden.

Lhr. (Fig. 53 an die Tafel zeichnend.)

(Die Kinder werden sogleich gewahr werden, daß sie sich nicht bestimmt genug ausgedrückt haben. Sie hatten vergessen, daß die vier S. gleich seyn müssen.)

Lhr. Also wiederholt es noch einmal, wie ein Qu. beschaffen seyn muß!

Kdr. Ein Qu. muß vier gleiche S. haben, die unter rechten W. zusammen kommen.

Lhr. Und wie muß eine Raute beschaffen seyn?

Kdr. Eine Raute muß vier gleiche S. haben, die unter sp. und st. W. zusammen kommen.

Lhr. Richtig! Jetzt seht Fig. 53 an; wodurch unterscheidet sie sich vom Qu.?

Kdr. Sie hat nur 2 und 2 gleiche S.

Lhr. Worin kommt sie mit dem Qu. überein?

Kdr. Beide haben vier r. W.

Lhr. Man nennt eine solche Figur ein längliches Rechteck oder Oblongum. Ich werde jetzt eine andere Fig. zeichnen. (Er zeichnet Fig. 54 an die Tafel.) Wodurch unterscheidet sich diese vom Rhombus?

Kdr. Dadurch, daß dort alle vier S. gleich sind; hier aber nur zwei und zwei S.

Lhr. Welche S. sind gleich? Die angränzenden oder die gegenüberstehenden?

Kdr. Die gegenüberstehenden.

Lhr. Wir nennen diese Fig. Rhomboide. Wodurch unterscheidet sich die Rhomboide von dem Rechteck?

Kdr. Bei dem R.E. kamen die 4 S. unter r. W. zusammen, bei der Rhomboide kommen sie aber unter schiefen W. zusammen.

Lhr. Worin kommen das R.E. und die Rhomboide überein?

Kdr. Darin, daß bei beiden je 2 und 2 gegenüberstehende S. gleich und gll. sind.

Lhr. Sucht jetzt Vierecke zu zeichnen, wo alle vier S. ungleich sind. —

Kdr. (indem sie Fig. 55 zeichnen.) Hier!

Lhr. Ein V.E. mit ungleichen W. und S. nennt man

Trapez.

Sind zwei S. gll., so nennt man es

Parallel-Trapez. (s. Fig. 56.)

XVIII. Stufe[a]). Regelmäßigkeit und Unregelmäßigkeit der Figuren.

Lhr. Sind bei einer Fig. entweder alle S. und alle W. gleich, oder sind wenigstens je 2 und 2 S., die einander gegenüberstehen, und je 2 und 2 W. gleich, so nennen wir die Fig. regelmäßig. Sind aber einzelne S. oder W. ungleich, wie wird man dann die Fig. nennen?

Kdr. Unregelmäßig.

Lhr. Wir wollen jetzt die Figuren prüfen, die wir schon kennen, und sehen, welche davon regelmäßig und welche unregelmäßig sind. (Indem er Fig. 52—57 an die Tafel zeichnet.) Welche von diesen Figuren sind regelmäßig?

(Die Kinder werden antworten: Fig. 52, 53, 54.)

Lhr. Welche Fig. sind unregelmäßig?

Kdr. Fig. 55, 56, 57.

Lhr. (auf Fig. 57 zeigend.) Gehört diese Fig. hier zu den regelmäßigen oder zu den unregelmäßigen?

Kdr. Zu den unregelmäßigen.

Lhr. Sie hat aber doch 2 Paar gleiche S. und 2 gleiche W. a und b!

Kdr. Allein die gleichen S. sind nicht gll., und 2 W. sind dem andern ungleich, und auch unter sich ungleich.

Lhr. (indem er das Parallel-Trapez Fig. 56 an die Tafel zeichnet.) Diese Figur hier hat 2 gleiche W. und 2 gll. S. — ist sie regelmäßig?

Kdr. Nein; denn sie hat 2 ungl. W. und 2 nicht gll. S.

Lhr. (indem er ein regelmäßiges Fünfeck an die Tafel zeichnet.) (s. Fig. 58.) Seht hier diese Fig. — wie viel S. hat sie? — Kdr. Sie hat 5 S.

Lhr. Diese 5 S. bilden 5 Ecken; daher nennen wir die Fig. ein Fünfeck.

Lhr. Was bemerkt ihr in Hinsicht der S.?

Kdr. Alle 5 S. sind gleich.

Lhr. Und die W.?

Kdr. Die W. sind wohl auch gleich.

Lhr. Daher ist dies Fünfeck ein regelmäßiges. (Indem er Fig. 59 an die Tafel zeichnet.) Hier ist ebenfalls ein Fünfeck mit 5 gleichen S., ist es auch ein regelmäßiges Fünfeck?

Kdr. Nein; denn die W. sind von verschiedener Art; 2 r., 2 st., 1 sp. W.

Lhr. So giebt es Fig. mit 6, 7, 8 Ecken u. s. w.; man nennt sie Sechsecke, Siebenecke, Achtecke; sind alle S. und alle W. gleich, so nennt man sie regelmäßig.

(Der Lehrer zeichne ein regelmäßiges Sechseck und ein eben solches Achteck an die Tafel.)

XVIII. Stufe[b]). Geschlossene Figuren mit äußeren und inneren Winkeln.

Lhr. (indem er Taf. XII, Fig. 1 zeichnet.) Wie viele r. W. habe ich hier gemacht? — Kdr. Vier!

Lhr. Ich hätte auch wohl das Viereck so zeichnen können, daß ein W. kein rechter geworden wäre?

Kdr. O ja, aber zwei andere Winkel wären dann auch nicht rechte W. geworden.

Lhr. Gut! Wir wollen einmal den untersten Winkel stumpf machen, was geschieht? (indem er zwei neue L. in die vorige Fig. zeichnet, so daß sie wie Fig. 2 aussieht.)

Kdr. Jetzt ist der unterste W. stumpf geworden, zwei

andere aber sind spitz geworden; denn sie waren vorher rechte W., jetzt sind sie aber kleiner als rechte W.

Lhr. Könnte ich auch wohl den stumpfen W. noch stumpfer machen?

Kdr. O ja, so lange bis gar kein W. mehr da ist.

Lhr. Das heißt also, bis zwei Seiten des Vierecks zu einer Seite geworden wären. Was für eine Figur wäre aber dann entstanden? — Kdr. Ein Dreieck.

Lhr. Also kann ein Dreieck auch betrachtet werden als ein Viereck, woran zwei Seiten zu einer geworden. Hätte ich denn aber die beiden Seiten nicht noch weiter aus einander biegen können? Besinnt euch einmal? —

Kdr. O ja; dann hätten sie sich aber doch auf der andern Seite einander zugebogen.

Lhr. Zeichne mir das einmal Einer an die Tafel.

(Das Kind wird eine Figur wie Fig. 3 zeichnen.)

Richtig! Hier also liegt der Winkel außen! ein Viereck ist es noch, wie vorher; aber ein Viereck mit einem äußern Winkel. Wir wollen beide Arten von Vierecke noch einmal vergleichen. Wie viele Seiten haben beide Figuren? (Fig. 1 und 3.) — Kdr. Vier Seiten.

Lhr. Wie viele Winkel? — Kdr. Auch vier.

Lhr. Wir nannten die Figuren aber doch Vierecke, sind denn auch vier Ecken da? — Kdr. Ja!

Lhr. Wo denn? — Kdr. Hier! (sie zeigen sie.)

Lhr. Das nanntest du ja vorhin Winkel. Ist denn Winkel und Ecke einerlei?

(Kdr. werden vermuthlich schweigen.)

Lhr. Denke einmal du gingest *außen* um die Figur 1 herum, da würdest du wohl um vier Ecken herum gegangen seyn? — Kdr. Ja!

Lhr. Wenn du dir aber denkst, du gingest *inwendig* herum, da würdest du in vier Winkel gewesen seyn, nicht wahr? — Kdr. Ja!

Lhr. Wenn ich nun außen um die Figur 3 herumginge?

Kdr. Da würden sie um drei Ecken und in einen Wingekommen seyn.

Lhr. Aber inwendig?

Kdr. In 3 Winkel und um eine Ecke.

Lhr. Es liegt also in der That in der letzten Fig. eine Ecke inwendig, und ein Winkel auswendig. In der ersten Fig. aber?

Kdr. Alle Ecken auswendig, und ein Winkel inwendig.

(Fig. 4 zeigt das Uebergehen beider Arten von Vierecke in einander, wie den Durchgang durch das Dreieck.)

Lhr. Ich werde jetzt das Fünfeck an die Tafel zeichnen. (Fig. 5.) Kann ich den obern Winkel auch wohl stumpfer machen?

Kdr. O ja, bis er eine gerade Linie wird. Dann ist es aber ein Viereck.

Lhr. Recht! Das Viereck kann also auch betrachtet werden?

Kdr. Als ein Fünfeck, worin zwei Seiten zu einer geworden.

Lhr. Ich könnte den Winkel vielleicht noch stumpfer machen?

Kdr. Ja, dann wird es eine Ecke, und es wird ein Fünfeck mit einem äußeren Winkel.

Lhr. Zeichnet mir das einmal.

(Die Kinder werden eine Gestalt wie Fig. 6 zeichnen.)

Lhr. Gut! Ich könnte aber eben so gut auch zwei Winkel allmählich stumpfer werden lassen, und zwar so lange, bis drei Seiten zu einer geworden. (er zeichnet Fig. 7.) Was entsteht? — Kdr. Ein Dreieck.

Lhr. Das Dreieck kann also auch betrachtet werden?

Kdr. Als ein Fünfeck, worin drei Seiten zu einer geworden.

Lhr. Und wenn ich beide Winkel noch stumpfer mache?

Kdr. So entsteht ein Fünfeck mit 2 äußeren W.

Lhr. Zeichnet es einmal!

(Die Kinder zeichnen Fig. 8.)

Lhr. Wir brauchten aber nicht zwei neben einander liegende W. zu verändern, sondern konnten eben so gut 2 getrennte nehmen. Welche wollen wir nehmen?

Kdr. Diese! (a und b Fig. 9.)

Lhr. Gut! Wenn wir beide nach und nach immer stumpfer werden lassen, so entsteht zuletzt?

Kdr. Ein Dreieck!

Lhr. Also wie vorher. Und noch weiter fortgesetzt?

Kdr. Ein Fünfeck mit zwei äußeren W.

Lhr. Nemlich ein solches wie dieses. (Fig. 10.) Wodurch ist es vom vorigen verschieden?

Kdr. Dadurch, daß hier die beiden äußeren W. durch eine zwischenliegende Ecke getrennt sind, bei dem vorigen aber nicht.

Lhr. Könnt ihr noch mehrere Arten von Fünfecken auffinden?

Die Kinder werden weiter keine finden. Der Lehrer kann eben so das Sechseck durchgehen, wenn es nöthig scheinen sollte. Das Fünfeck ist die Durchgangsfigur für das Sechseck mit einem äußern W., das Viereck für das Sechseck mit zweien, und das Dreieck für das Sechseck mit drei äußern Winkeln.

XVIII. Stufe c). Verschiedenartigkeit der Vielecke.

Lhr. Wenn wir nur bloß auf die Lage der Winkel, ob sie nemlich in oder außer der Figur liegen, sehen, wie vielerlei Arten von Dreiecke kann es geben?

Kdr. Nur eine Art; denn die Winkel liegen immer in der Figur.

Lhr. Richtig! Denn wenn bei einem Dreiecke ein Winkel auswendig liegen könnte, so müßten nur 2 inwendig liegen. Wir können aber aber mit graden Linien keine zweieckige Figur — geschlossenen Raum — bilden. Wie viele Arten von Vierecken giebt es?

Kdr. Zweierlei, entweder mit lauter innern, oder mit 3 innern und einem äußern Winkel.

Lhr. Giebt es kein Viereck mit 2 äußern W.?

Kdr. Nein, dann blieben wieder nur 2 innere.

Lhr. Wie viele Arten von Fünfecke giebt es?

Kdr. Eins mit lauter inneren Winkeln, eins mit einem äußeren und zwei mit zwei äußeren Winkeln.

Lhr. Richtig! Sucht nun einmal auf, wie viele Sechsecke es giebt.

Kdr. Erstens eins mit lauter innern Winkeln. Zweitens eins mit einem äußeren Winkel. Drittens eins mit mit 2 neben-

einander liegenden äußeren Winkeln, eins mit 2 getrennten äußeren Winkeln.

Lhr. Von letzteren giebt es zwei Figuren. (Er zeichnet Fig. b und c in Fig. 11.) Wodurch unterscheiden sich beide?

Kdr. In b sind beide äußere Winkel durch eine Ecke, in c aber durch 2 Ecken getrennt.

Lhr. Worin sind sie sich aber ähnlich?

Kdr. Darin, daß beides Fünfecke mit 2 äußeren Winkeln sind.

Lhr. Das ist Fig. a auch. Ihr könnt es bestimmter sagen.

Kdr. Ja, darin daß beides Fünfecke mit 2 äußern getrennten Winkeln sind.

Lhr. Gut! Darum wollen wir beide Figuren nur als Darstellungen eines und desselben Falles betrachten, und sagen: Es giebt entweder Fünfecke mit 2 äußern neben einander liegenden, oder getrennten Winkeln. Nun weiter.

Kdr. Viertens ein Sechseck mit 3 neben einander liegenden äußeren W., ein Sechseck mit 2 neben einander l. und 1 getrennten ä. W., ein Sechseck mit 3 getrennten äußeren W. Weiter giebt es keine.

Lhr. Gut! Wir haben also 7 verschiedene Fälle, wovon aber der eine uns zwei Fig. gab, daher 8 verschiedene Sechsecke.

Der Lehrer kann dies nun nach Erfordern fortsetzen. Auf Tafel XII, Fig. 11 sind die verschiedenen Vielecke bis zum Achteck angegeben. Die zu einander gehörigen Figuren eines und desselben Falls sind zusammen geklammert. Es giebt jederzeit eben so viele Fälle, als äußere Winkel da sind. Daher lassen sich die verschiedenen Fälle auch leicht berechnen, sie wachsen wie die Zahl der äußeren Winkel. Es giebt jedesmal, wenn ein äuß. W. da ist, einen Fall, wenn 2 da sind, zwei Fälle; bei 3 ä. W. drei Fälle; bei vier äußeren W. vier Fälle u. s. w. Daher giebt es:

beim Dreieck $1 = 1$ Fall.
— Viereck $1 + 1 = 2$ Fälle.
— Fünfeck $1 + 1 + 2 = 4$ Fälle.
— Sechseck $1 + 1 + 2 + 3 = 7$ Fälle.
— Siebeneck $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$ Fälle ꝛc.

(S. Fig. 11, Taf. XII.)

Die erste 1 gilt jedesmal für das Vieleck mit lauter inneren Winkeln. Die letzte Zahl ist jedesmal 3 weniger, als die Figur überhaupt Ecken hat, weil 3 inwendig jederzeit liegen müssen, wenn die Figur die höchste Zahl von äußeren Winkeln hat. Soll daher die Anzahl der Fälle gesucht werden, welche bei einem gegebenen Vielecke Statt finden können, so braucht man nur die Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche 3 weniger ist, als die Zahl der Ecken, zu addiren und 1 hinzuzurechnen: z. B. Wie viele Fälle giebt es beim Neuneck? Hier muß ich bis 9 weniger 3 = 6 die Zahlen addiren; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 geben 21 und 1 hinzu giebt 22 Fälle. Die einzelnen Figuren jedes Falles muß man besonders suchen.

XIX. Stufe. Geschlossene Figuren, die dadurch entstehen, daß in geschlossenen Figuren Linien gezogen werden.

Lhr. Zieht in einem Dr. aus dem einen W. nach der ihm gegenüberstehenden S. eine gerade Linie, und sagt mir, welche Veränderung dadurch mit dem Dr. vorgeht?

Kdr. (nachdem sie es gethan, s. Fig. 60.) Das Dr. wird in zwei kleinere Dr. getheilt.

Lhr. Jetzt zieht von der Mitte der einen S. des Dr. mit der einen der beiden andern S. gll. auf die dritte S. eine L., und gebt an, was für geschlossene Fig. dadurch entstehen?

Kdr. Es entsteht ein Dr. und ein P.Tr. (Fig. 61.)

Lhr. Zieht jetzt aus dem Sch.P. zweier W. des Dr., aus jedem nach der gegenüberstehenden S. eine gerade L. und sagt mir, in welche Fig. das D. dadurch getheilt wird?

Kdr. (nachdem sie Fig. 62 gezeichnet.) Dadurch entstehen 3 Dr. und 1 Tr.

Lhr. Zieht aus einem der W. nach der gegenüberstehenden S. eine gerade L., und dann aus der Mitte einer der beiden andern S., gleichlaufend mit der S., auf welche ihr die 1ste L. gezogen hattet, eine 2te L., und seht zu, welche Figuren dadurch entstehen werden?

Es entstehen 2 P.Tr. und 2 Dr. (Fig. 63.)

Lhr. Zieht aus irgend einem P. einer S. eines Dr., gll. mit den beiden andern S., 2 L. und sagt mir, welche Figuren dadurch entstehen?

Kdr. (nachdem sie Fig. 64 gezeichnet.) Dadurch entsteht ein Pgr. und 2 Dr.

Lhr. Zieht jetzt in einem Quadr. aus der einen Ecke nach der gegenüberstehenden Ecke eine L., die wir deswegen Ecklinie nennen wollen, und seht zu, welche Figuren dadurch entstehen? So kann man auch Eckl. im Rh. ziehen lassen.

XX. Stufe. Geschlossene Figuren, die dadurch entstehen, daß zwei Figuren in Punkten verbunden werden.

Lhr. Seht zu, in wie vielen P. man 2 Dr. verbinden kann (ohne sie zugleich in L. zu verbinden).

Kdr. Man kann 2 Dr. in 1, in 2, 3, 4, 5 und 6 P. verbinden.

Lhr. Seht zu, was für Figuren entstehen, wenn man zwei Dr. in zwei P. verbindet?

a) 2 Dr. und 1 Tr. mit einem äußern W. (s. Fig. 65 a.)

b) 1 Dr., 1 P. Tr. und 1 Tr. mit einem äußern W. (s. Figur 65 b.)

c) 2 Dr. und 1 Fünfeck mit 1 äußern W. (s. Fig. 65 c.)

d) 1 Dr., 1 Tr. und 1 Sechseck mit 1 äußern W. (s. Figur 65 d.)

e) 2 Fünfecke mit einem äußern W. und ein Pgr. u. s. w. (s. Figur 65 e.)

Lhr. Verbindet jetzt 2 Dr. in 3 P., in 4 P. (s. Figur 66.) Verbindet 2 Dr. in der größt-möglichen Anzahl von P., und seht zu, was für Figuren dadurch werden gebildet werden.

Kdr. Ein Sechseck und 6 Dr. (Fig. 67 a.)

Der Lehrer kann diese Ansicht so weit ausführen, als er es angemessen findet; dieses Aufsuchen der Formen gewährt eine sehr willkommene Beschäftigung für die eine Abtheilung, während der Lehrer mit einer andern sich abgeben muß, und ist, gehörig behandelt, sehr anziehend für die Kinder.

Man kann auch Qu., R. E. u. s. w. in P., in L., in W. u. s. w. verbinden lassen (s. Fig. 68a bis 68g), um die Kinder noch mehr zu üben, wenn Zeit genug vorhanden ist.

II. Abschnitt. Die krummen Linien und ihre Verbindung.

XXI. Stufe. Die Kreis-Linie.

Lhr. (Indem er eine Kreis-Linie an die Tafel zeichnet (s. Fig. 69) — welches entweder mit Hülfe eines Stock-Zirkels oder auf die Art geschehen kann, daß der Lehrer in der Mitte der Tafel einen Stift befestigt, woran eine Schnur gebunden ist, an deren anderem Ende sich ein Stück Kreide befindet — und auf diese Kr. L. hinweist.) Diese L. hier nennen wir eine Kreis-Linie, oder ganz kurz, einen Kreis. Was bemerkt ihr an dieser L.? — Kdr. Sie ist krumm.

Ein anderes Kind. Sie hat keinen Anfangs- und keinen End-Punkt.

Ein drittes Kind. Sie schließt eine Fläche ein.

Lhr. Wir wollen sie jetzt einmal mit einer geraden L. vergleichen. (indem er eine solche an die Tafel zeichnet.) Worin sind sie verschieden? Jedes von euch gebe mir irgend eine Verschiedenheit an.

Kdr. Die gerade L. hat einen Anfangs- und einen End-Punkt; die Kr. L. hat weder Anfangs- noch End-Punkt.

Die Kr. L. schließt immer eine Fläche ein; die gerade L. kann nie eine Fläche einschließen.

Bei der geraden L. hat jeder Theil derselben die nemliche Richtung; bei der krummen L. ändert sich die Richtung unaufhörlich.

Die gerade L. kann ich verlängern; die Kr. L. kann ich nicht verlängern.

Von der geraden L. kann ich ein Stück hinwegnehmen, es bleibt doch eine gerade L.; von der Kr. L. darf ich nichts hinwegnehmen, wenn es ein Kr. bleiben soll.

Lhr. (indem er auf den Mittelpunkt des Kreises hinzeigt.) Wo liegt dieser Punkt hier?

Kdr. Der P. liegt in der Mitte des Kreises.

Lhr. Richtig! darum nennen wir ihn den Mittelpunkt des Kreises. Jetzt betrachtet einmal seine Lage in Rücksicht auf die Kr. L. recht genau. Was bemerkt ihr?

Kdr. Jeder P. des Kr. ist gleichweit vom M. P. entfernt.

Lhr. Wird es bei der geraden L. auch einen P. geben, der gleichweit von allen P. der L. entfernt ist? — Kdr. Nein!

XXII. Stufe. Der Bogen.

Lhr. Jetzt wollen wir sehen, welche Veränderungen wir mit dieser Kr. L. vornehmen können.

(indem er einen Theil davon, allenfalls die Hälfte, weglöscht, da denn der Bogen Fig 70 übrig bleibt.)

Was bleibt jetzt von der Kr. L. übrig?

Kdr. Es bleibt ein Theil der Kr. L. übrig.

Lhr. Einen solchen Theil einer Kr. L. nennt man auch Bogen. Was für einen Theil der Kr. L. wird dieser Bogen ungefähr seyn? Kdr. Ungefähr die Hälfte der Kr. L.

Lhr. Worin stimmt der Bogen mit der geraden Linie überein?

Kdr. Der Bogen hat einen Anfangs-P. und einen End-P. die gerade L. ebenfalls.

Ein anderes Kd. Die L. und der Bogen können beide keine Fläche einschließen.

Ein drittes Kd. Beide haben nur eine einzige Ausdehnung.

Ldr. Worin sind der Bogen und die gerade L. verschieden?

Kdr. Bei der geraden L. bleibt sich die Richtung immer gleich; bei dem Bogen ändert sich die Richtung unaufhörlich.

Lhr. (indem er zwei P. an die Tafel zeichnet.) Diese beiden P. hier haben eine bestimmte Entfernung von einander! wie können wir diese Entfernung messen?

Kdr. Wir ziehen eine L. von einem P. zum andern.

Lhr. (indem er beide durch einen Bogen verbindet.) So, nun kann ich also ihre Entfernung messen!

Kdr. Nein, es muß eine gerade L. seyn, nicht eine krumme.

Lhr. Warum?

Kdr. Weil eine gerade L. der kürzeste Weg von einem P. zum andern ist.

Lhr. (indem er beide P. durch eine gerade L. verbindet.) Der kürzeste Weg von einem P. zum andern P. giebt mir ihre wahre Entfernung. Dies ist also wieder eine Verschiedenheit der geraden L. und des Bogens. Drückt sie durch Worte aus.

Kdr. Die gerade L. ist der kürzeste Weg von einem P. zum andern; der Bogen ist der längere Weg.

Lhr. Zeichnet 2 gll. Bogen. (s. Fig. 71.)

Lhr. Zeichnet 2 ungll. Bogen. (s. Fig. 72.)

XXIII. Stufe. Vereinigung der Kreise und Bogen in Punkten.

Lhr. Welche von diesen beiden Arten von Bogen (auf die gll. und ungll. zeigend) (s. Fig. 71 und 72) können sich wohl vereinigen?

Kdr. Nur die ungll. Bogen können sich vereinigen?

Lhr. In wie vielen P. können sich 2 Kr. oder 2 Bogen vereinigen?

Kdr. 2 Kr. ꝛc. können sich in 1 oder in 2 P. vereinigen.

Lhr. Zeichnet 2 Bogen, die sich in einem P. vereinigen. (s. Fig. 73.)

Lhr. Zeichnet 2 Kr. die sich in einem P. vereinigen. (s. Fig. 74 oder 75.) Der Lehrer sagt ihnen, daß der P., wo sich diese beiden Kreise berühren, der Berührungs-Punkt genannt wird. Was für ein Unterschied findet bei diesen beiden Figuren Statt? (Vielleicht fallen die Kinder nicht von selbst darauf; dann mache sie der Lehrer darauf aufmerksam.)

Lhr. Wo liegen bei Fig. 74 die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise, innerhalb oder außerhalb des einen Kreises?

Kdr. Die M. P. liegen beide innerhalb des einen Kreises.

Lhr. Ist es bei Fig. 75 eben so?

Kdr. Nein, da liegt der M. P. des einen Kreises außerhalb des andern Kreises. Sie liegen nicht beide in einem Kreise.

Lhr. Wenn nun beide M. P. solcher sich berührenden Kreise in einem und demselben Kreise liegen (auf Fig. 74 zeigend), können dann beide von gleicher Größe seyn?

Kdr. Nein, die Kr. müssen von ungleicher Größe seyn; der innere Kr. muß kleiner seyn, als der äußere.

Lhr. Aber, wenn die Mittelpunkte nicht in einem und demselben Kr. liegen, müssen dann die beiden Kr. auch von ungleicher Größe seyn?

Kdr. Nein, sie können von gleicher oder auch von ungleicher Größe seyn.

XXIV. Stufe. Anzahl der Winkel, die durch die Vereinigung zweier oder mehrerer Bogen oder Kreise gebildet werden.

Lhr. Wie viele W. bilden zwei Bogen, die sich in einem P. vereinigen, wenigstens?

Kdr. Zwei Bogen ꝛc. wenigstens einen W.

Lhr. Wie viele W. bilden 2 Kr. L., die sich in einem P. vereinigen, wenigstens?

Kdr. 2 Kr. L. ꝛc. bilden wenigstens zwei W.

Lhr. Können 2 Bogen, die sich in einem P. vereinigen, auch mehr als einen W. bilden?

Kdr. 2 Bogen, die sich in einem P. vereinigen, können auch noch 2 und 4 W. bilden.

Lhr. Es giebt also 3 Fälle; zeichnet sie!

(nachdem es geschehen) (s. Fig. 73, Fig. 76a und b, Fig. 77.)

Unter welchen Umständen bilden 2 Bogen, die sich in einem P. vereinigen, zwei W.?

Kdr. 2 Bogen ꝛc. bilden dann zwei W., wenn der eine Bogen über den Vereinigungs-P. hinausgeht.

Lhr. In welchem Falle bilden 2 Bogen, die sich in einem P. vereinigen, vier W.?

Kdr. 2 Bogen ꝛc. wenn beide Bogen über den Ver.-P. hinausgehen, oder wenn sie sich schneiden.

Lhr. Können 2 Kr. L., die sich in einem P. vereinigen, auch mehr als 2 W. bilden? — Kdr. Nein!

Lhr. Können sie sich nicht eben so gut schneiden wie 2 Bogen?

Kdr. Nein, wenn sie sich schneiden sollen, so müssen sie sich in zwei P. schneiden, also würde es dann zwei Vereinigungs-P. geben.

Lhr. Richtig! — Jetzt vereinigt zwei Bogen in zwei P. Wie viele W. entstehen dadurch wenigstens?

Kdr. Wenn ꝛc. so entstehen wenigstens 2 W.

Lhr. Zeichnet das auf eure Tafel! (s. Fig. 78a und Fig. 78b.) Schließen diese beiden Bogen eine Fläche ein? Wie viel Ecken hat die dadurch entstandene Figur?

Kdr. Die Figur hat zwei Ecken.

Lhr Darum wollen wir sie künftig ein Zweieck nennen. Welches wird nun die höchste Anzahl von W. seyn, die 2 Bogen, welche sich in zwei P. vereinigen, bilden können?

Kdr. Die höchste Anzahl ist acht.

Lhr. Zeichnet das! (s. Fig. 79.) Wie viele Fälle wird es überhaupt in Absicht auf die Anzahl der W. geben, bei 2 Bogen, die sich in 2 P. vereinigen? Sucht das auf, indem ihr die verschiedenen Fälle auf die Tafel zeichnet!

Kdr. Es giebt 6 verschiedene Fälle.

Lhr. Gebt mir alle 6 Fälle an, und fangt mit der kleinsten Anzahl von W. an.

Kdr. 2 Bogen, die sich in 2 P. vereinigen, können bilden: 2, 3, 4, 5, 6, 8 W.

Lhr. Sucht jetzt auf, welches die geringste Anzahl von W. ist, die drei Bogen, welche sich in einem P. vereinigen, bilden können?

Kdr. Sie bilden wenigstens 2 W.

Lhr. Zeichnet das gleichfalls! (s. Figur 80.) Können 3 Bogen u. s. w. auch mehr, als zwei W. bilden? — Wie viele W. werden 3 Kr., die sich in einem P. vereinigen, wenigstens bilden?

Kdr. 3 Kr. ꝛc. wenigstens 4 W. (s. Figur 81.)

Lhr. Können sich auch 3 gleich große Kr. in 1 P. vereinigen?

Kdr. Nein, drei gleich große Kr. können sich nie in einem einzigen P. vereinigen.

Lhr. Welches ist die geringste Anzahl von P., in denen sich 3 gleich große Kr. vereinigen können?

Kdr. Drei ꝛc. Kr. müssen sich wenigstens in drei P. vereinigen.

Lhr. In wie vielen P. werden sich 2 gleiche und 1 ungleich großer Kr. wenigstens vereinigen?

Kdr. In 2 P.

Lhr. Zeichnet das (s. Figur 82)! Sagt mir jetzt, wie viele W. drei Bogen wenigstens bilden werden, die sich in 2 P. vereinigen?

Kdr. 3 B. ꝛc. bilden wenigstens 3 W.

Lhr. Wie viele und welche Fälle finden überhaupt Statt, in Ansehung der Anzahl der W. bei 3 Bogen, die in zwei P. zusammen treffen?

Kdr. 3 Bogen ꝛc. können jede Anzahl von W., von 3 bis 12 W., bilden.

(Der Lehrer lasse alle diese Fälle von jedem Kinde auf seine Tafel zeichnen, doch so sauber als möglich.)

Lhr. Sucht jetzt, welches die geringste Anzahl von W. ist, die drei Bogen, welche sich in drei P. vereinigen, bilden werden?

Kdr. Drei Bogen ꝛc. bilden wenigstens 3 W.

Lhr. Zeichnet das (s. Figur 83)! Welches wird die größte Anzahl von W. seyn, welche 3 Bogen, die sich in 3 P. verbinden, bilden können?

Kdr. Die größte Anzahl ꝛc. ist 14 (s. Figur 84).

Lhr. Sucht alle verschiedenen Fälle auf, von der geringsten bis zur größten Anzahl von W.

(Jede Anzahl von W. von 3 bis 14.)

XXV. Stufe. Verschiedene Arten der Winkel, die durch Bogen und Kreise gebildet werden.

Lhr. Zeichnet jetzt 2 Bogen, die in einem P. sich vereinigen, und seht zu: ob die W., die dadurch gebildet werden, immer die nemlichen sind, oder ob verschiedene Arten der W. entstehen? (s. Figur 85 a, b, c.)

Lhr. Wir wollen sie jetzt benennen, damit wir sie künftig von einander zu unterscheiden wissen: Dies (auf Fig. 25a zeigend) ist ein hohler W., (auf Figur 85b zeigend) ein erhabener W., (endlich auf Figur 85c zeigend) dieser ist weder hohl noch erhaben — wir wollen ihn daher gemischt nennen.

Welche Arten von W. können zwei Bogen bilden, die sich in einem P. berühren, ohne daß eine L. durchgeht?

Kdr. 2 Bogen ꝛc., entweder einen hohlen oder einen erhabenen, oder einen gemischten W.

Lhr. Welche Arten von W. können zwei Kreis-Linien bilden, die sich in einem P. berühren?

Kdr. Zwei Kr.L. bilden entweder erhabene, oder gemischte W.

Lhr. Zeichnet beides (s. Figur 74 und 75)! — Die W. sind dadurch entstanden, daß zwei Kr.L. sich berühren; wie könnte man sie daher auch nennen?

Kdr. Berührungs-W.

Lhr. Was für Ber.W. können wohl 2 Bogen bilden, die sich in einem P. berühren?

Kdr. Zwei Bogen, die sich in einem P. berühren, bilden entweder 2 gemischte, oder 2 erhabene Berührungs-W.

Lhr. Zeichnet beides! Was für W. werden 2 Bogen bilden, die sich in einem P. vereinigen, so daß der eine Bogen über den Ver.P. hinausgeht? Sucht das auf, indem ihr diese Verbindung auf euren Tafeln darstellt.

Kdr. (nachdem sie es gethan.) 2 Bogen ꝛc. bilden ein Paar N.W. und zwar können sie bilden:

a) einen hohlen und einen gemischten W. (s. Figur 76a.)
b) einen erh. und einen gem. W. (s. Figur 76b.)

Lhr. Was ist der N.W. eines erhabenen W.?

Kdr. Der N.W. eines erh. W. ist ein gem. W.

Lhr. Welche Art von W. hat der hohle W. zum N. W.?

Kdr. Ein hohler W. hat immer einen gemischten W. zum N. W.

Lhr. Welche Art von W. hat der gemischte W. immer zum N. W.?

Kdr. Ein gemischter W. kann einen erhabenen oder einen hohlen W. zum N. W. haben.

Lhr. Wenn 2 Bogen sich so vereinigen, daß beide über den Ver. P. hinausgehen, oder daß sie sich schneiden, was für W. werden sie dann bilden?

Kdr. Wenn 2 Bogen sich schneiden, so bilden sie 2 Paare Sch. W.

Lhr. Wie waren die gegenüber stehenden Sch. W. bei den geraden L. beschaffen?

Kdr. Bei geraden L. sind die gegenüberstehenden Sch. W. einander gleich.

Lhr. Wird dies auch bei den Sch. W. der Fall seyn, welche durch 2 Bogen gebildet werden? — Zeichnet solche Sch. W.!

Kdr. (nachdem sie es gethan) (s. Fig. 77.) Nein, nicht bei jedem Paare der gegenüber stehenden Sch. W. sind beide W. einander gleich.

Lhr. Was ist der Sch. W. eines erhabenen W.?

Kdr. Der rc. ist ein hohler W.

Lhr. Was ist der Sch. W. eines hohlen W.?

Kdr. Der rc. ist ein erhabener W.

Lhr. Was ist der Sch. W. eines gemischten W.?

Kdr. Der rc. ist ein gemischter W.

Lhr. Was für W. sind alle vier Sch. W., welche durch 2 Bogen gebildet werden?

Kdr. Es sind 2 gemischte, 1 hohler, 1 erhabener W.

XXVI. Stufe. Anzahl und Art der Winkel, die durch Vereinigung dreier oder mehrerer Bogen in 1 oder 2 P. gebildet werden, ohne daß eine geschlossene Figur entsteht.

Lhr. Verbindet drei Bogen in einem P., doch ohne daß ein Bogen über den V. P. hinausgeht — wie viele ver-

schiedene Fälle wird es da geben, in Absicht auf die Art der W.? — 4 Fälle (Fig. 86. a, b, c, d), nemlich:

a) 2 gemischte W.,
b) einen hohlen und 1 gemischten W.,
c) einen erhabenen und 1 gemischten W.,
d) 1 erhabenen und 1 hohlen W.

Lhr. Verbindet 3 Bogen in 1 P. so, daß eine L. durch den V. P. geht, und daß sie 3 W. bilden.

(Die Kinder werden hier 4 Fälle finden:)

a) 2 gemischte W. und 1 erhabenen,
b) 2 erhabene und 1 hohlen,
c) 2 gemischte und 1 hohlen W.,
d) 1 erhabenen und 2 hohle W.

Lhr. Verbindet drei Bogen in einem P. so, daß der eine Bogen über den V. P. hinausgeht, und daß sie vier W. bilden. Wie viele verschiedene Fälle kann es dann geben, in Rücksicht der Art der W.?

(Die Kinder werden einen einzigen Fall finden, nemlich 1 hohlen, 1 erhabenen, 2 gemischte W.) (s. Figur 87.)

Lhr. Wie viele W. können vier Bogen bilden, die in 1 P. verbunden sind, so daß kein Bogen über den V. P hinausgeht?

(Sie können 3 oder 4 W. bilden.)

Lhr. Verbindet jetzt 4 Bogen in einem P. so, daß sie A. drei W. bilden, und sehet zu, welche verschiedene Fälle dadurch entstehen können (immer mit Rücksicht auf die Art der W.)

(Es giebt 6 Fälle.)

a) 1 erh., 2 hohle W., b) 1 erh., 2 gem. W., c) 1 hohlen, 2 erh. W., d) 3 gem. W., e) 1 hohlen, 1 erh. und 1 gem. W., f) 1 hohlen, 2 gem. W.

Lhr. Verbindet ꝛc., so daß sie B vier W. bilden.

(Hier werden die Kinder 3 Fälle finden.)

Lhr. Man soll drei Bogen in zwei P. verbinden, ohne daß ein Bogen über den V. P. hinausgeht. (Es giebt hier 6 Fälle.)

a) 2 hohle W., b) 2 gem. W., c) 2 erh. W., d) 1 erh. und 1 gem. W., e) 1 hohlen und 1 gem. W., f) 1 hohlen und 1 erh. W.

Lhr. Man soll fünf Bogen in 2 P. verbinden, so daß kein Bogen durch den V. P. geht.

(Der Lehrer kann auch damit abwechseln, daß er den Kindern aufgiebt, irgend einen bestimmten Fall zu finden; z. B. hier sollen 5 Bogen so verbunden werden, daß sie 2 hohle, 1 erhabenen und 1 gemischten W. bilden, oder so, daß sie 4 gemischte W. bilden.)

XXVII. Stufe. Bildung geschlossener Figuren, die durch die Verbindung zweier oder mehrerer Bogen entstehen.

Lhr. Verbindet jetzt 2 Bogen in 2 P. so, daß sie eine Fläche einschließen. (s. Fig. 78 a. und b.)

Wie viele Ecken hat diese Figur?

Kdr. Sie hat zwei Ecken.

Lhr. Wie wird man sie also nennen?

Kdr. Ein Zweieck.

Lhr. (indem er beide Arten von Zweiecken zeichnet.) Worin sind diese beiden Zweiecke verschieden?

Kdr. Das eine (a) hat 2 hohle W., das andere (b) hat 2 gemischte W.

Lhr. Wie können wir also die 1ste Art von Zweiecken nennen? (Fig. 78 a.) — Kdr. Ein hohlwinkliches Zweieck.

Lhr. Und wie die andere Art? (Fig. 78 b.)

Kdr. Ein gemischtwinkliches Zweieck.

Lhr. Wie viele Arten von Zweiecken giebt es also?

Kdr. Es giebt 2 Arten von Zweiecken, hohlwinkliche und gemischtwinkliche.

Lhr. Richtig! Nun wollen wir drei Bogen in 2 P. vereinigen, so, daß sie zwei geschlossene Figuren bilden. Wie viele Fälle wird es da geben, in Hinsicht auf die Art der Figuren?

Kdr. 2 Fälle; sie bilden entweder 2 gemischtwinkliche, oder ein hohlwinkliches und ein gemischtwinkliches Zweieck. (s. Fig. 88 a. und b.)

Lhr. Verbindet drei Bogen in drei P. so, daß kein Bo-

gen über den Vereinigungs-P. hinausgeht, und sagt mir, was ihr dadurch erhalten habt.

Kdr. (nachdem sie es versucht.) Wenn wir 3 Bogen ꝛc., so entstehen geschlossene Figuren mit drei Ecken.

Lhr. Ganz recht; diese Figuren nennen wir auch Dreiecke; wir wollen sie zum Unterschiede von den Dreiecken, die durch die Verbindung gerader L. entstanden sind, krummlinige Dr. nennen, und nun auf die Art der W. Acht geben. Wie viele verschiedene Arten krummliniger Dr. wird es wohl geben?

Kdr. 4 verschiedene Fälle. (Fig. 89 a.) a) 3 hohle W., b) 1 hohlen, 2 gem., c) 1 erh., 2 gem., d) 3 erh. W.

Lhr. Bildet Vierecke mit 4 Bogen, die sich in 4 P. berühren, ohne durch den V. P. zu gehen.

XXVIII. Stufe. Anzahl und Art der geschlossenen Figuren, die durch die Verbindung von 2 oder 3 Bogen gebildet werden.

Lhr. Wie viele geschlossene Figuren können durch die Verbindung dreier Bogen gebildet werden, die in 2 P. verbunden sind?

Kdr. Durch ꝛc. können 2 Figuren gebildet werden.

Lhr. Welche Figuren?

Kdr. 2 Zweiecke. (s. Fig. 88 a. b.)

Lhr. Wie viele geschlossene Figuren können durch 3 Bogen gebildet werden, die sich in 3 P. verbinden?

Kdr. Durch ꝛc. können nur zwei Figuren gebildet werden.

Lhr. Welche Figuren?

Kdr. Ein Dreieck und 1 Zweieck oder 2 Zweiecke (s. Fig. 90 a. und 90 b.)

Lhr. Verbindet 3 Bogen in 4 P. und sagt, wie viele Figuren dadurch gebildet werden können?

Kdr. Wenn ꝛc., so werden zwei oder drei Figuren gebildet. (Es giebt hier eine große Mannigfaltigkeit von Figuren.)

Lhr. Was für Figuren?

Kdr. Zwei Dreiecke, oder 2 Dr. und 1 Zweieck, oder 3 Dr. u. s. w.

Man könnte auch hier noch die Verbindung der Kr. und Zweiecke in L. und P. vornehmen lassen, doch scheint es mir, daß man sie füglicher übergeht.

IIII. Abschnitt. Die Verbindung krummer und gerader Linien.

XXIX. Stufe. Vereinigung gerader und krummer Linien in Punkten und Benennung der dadurch entstehenden Winkel.

Lhr. So wie wir bisher zuerst nur gerade L., dann nur kr. L. verbunden hatten, so können wir jetzt gerade und kr. L. verbinden. In wie vielen P. lassen sich 1 gerade und 1 krumme L. verbinden?

Kdr. Eine gerade und eine kr. L. lassen sich in einem oder in 2 P. verbinden. (s. Fig. 91 a. und b.)

Lhr. Da wir hier mit zweierlei L., nemlich mit geraden und kr. L., zu thun haben, so wollen wir die dadurch entstehenden W., die aus den gemischten L. gebildet werden, gemischtlinige W. nennen.

(Fig. 91 a. und Fig. 92. zeichnend.)

Sind beide W. von gleicher Beschaffenheit?

Kdr. Nein!

Lhr. Worin sind sie verschieden?

Kdr. Bei dem einen (auf Fig. 91 a. zeigend) ist die kr. L. nach Außen gekrümmt; bei dem andern (auf Fig. 92 zeigend) nach Innen.

Lhr. Haben diese beiden W. nicht Aehnlichkeit mit den krummlinigen W.?

Kdr. Ja; der erste hat Aehnlichkeit mit dem hohlen, der zweite mit dem erhabenen W.

Lhr. Richtig! Nach dieser Aehnlichkeit wollen wir sie

nun auch benennen, nemlich den ersten einen gemischtlinig-hohlen W., den 2ten einen gemischtlinig-erhabenen Winkel.

Wer kann mir eine gerade L. zeichnen, die einen Kr. so berührt, daß 2 Ber. W. entstehen?

(Die Kinder werden sogleich Fig. 93 zeichnen.)

Lhr. Was für W. bildet die L. mit dem Kr.?

Kdr. 2 gemischtlinig-erhabene W.

Lhr. Zeichnet einen Kr. und zieht innerhalb dieses Kr. eine gerade L. von einem P. des Kr. zu irgend einem andern P. desselben Kr.; — wie viele und welche W. entstehen dadurch?

Kdr. Dadurch entstehen 4 gemischtlinig-hohle W.

Lhr. Verlängert die gerade L. innerhalb des Kr. nach außen, nach beiden S. hin — wie viele und welche neue W. entstehen durch diese Verlängerung?

Kdr. (indem sie es thun) Dadurch entstehen 4 gemischtlinig-erhabene W.

XXX. Stufe. Anzahl und Art der Winkel, die durch die Verbindung zweier und mehrerer geraden und krummen Linien entstehen.

Lhr. Wie viele W. können eine gerade und eine kr. L. bilden, die sich in einem P. verbinden?

Kdr. Eine gerade ꝛc. 1, 2 oder 4 W.

Lhr. Was für einen W. eine gerade und eine kr. L. bilden können, die sich in 1 P. verbinden, ohne daß eine L. über den V. P. hinausgehe, das haben wir vorhin schon gesehen; allein, wir wollen jetzt sehen, was für W. zwei solche L. bilden, die sich so vereinigen, daß sie N. W. bilden. Wer kann mir das sagen?

Kdr. Sie bilden entweder 2 hohl- oder 2 erhaben-gemischtlinige W. (s. Fig. 9a und 9b.)

Lhr. Was ist also der N. W. eines gemischtlinig-hohlen W.?

Kdr. Der ꝛc. ist ein gemischtlinig-hohler W.

Lhr. Was ist der N. W. eines gemischtlinig-erhabenen W.?

Kdr. Der ꝛc. ist ein eben solcher W.

Lhr. Verbindet jetzt eine gerade und eine kr. L. so, daß sie vier W. bilden, und sagt mir, welche Arten von W. sie bilden werden?

Kdr. (nachdem sie Fig. 96 gezeichnet.) Wenn eine gerade und eine kr. L. in einem P. so verbunden sind, daß sie sich schneiden, so bilden sie 2 hohl- und 2 erhaben-gemischtlinige W.

Lhr. Was ist der Sch. W. eines hohl-gemischtlinigen W.?

Kdr. Der Sch. W. ꝛc. ist ein erhaben-gemischtliniger W.

Lhr. Was ist der Sch. W. eines erhaben-gemischtlinigen W.?

Lhr. Verbindet jetzt eine gerade und kr. L. in zwei P. Wie viele Fälle kann es hier geben, in Absicht auf die Anzahl der W.?

(Dieselbe Ansicht ist bei den geraden und dann bei den kr. L. vorgekommen, und darf daher nicht zu weit ausgedehnt werden.)

Lhr. Wie viele W. können 3 L. bilden, nemlich 2 kr. und eine gerade, oder 2 gerade und eine kr. L., wenn sie in einem P. zusammen kommen, so daß keine L. über den V. P. hinaus geht?

Lhr. Sucht alle Fälle auf, wo sie 2 W. bilden, und in Ansehung der Art der W. verschieden sind.

Lhr. Sucht alle Fälle, wo sie 3 W. bilden.

XXXI. Stufe. Bildung geschlossener Figuren durch gerade und krumme Linien.

Lhr. Verbindet eine gerade und eine kr. L. so, daß sie eine Fläche einschließen. (s. Fig. 91 b.)

Wie werden wir diese Figur nennen?

Kdr. Ein Zweieck.

Lhr. Und zwar ein gemischtliniges Zweieck.

Jetzt bildet Dr.; zuerst mit zwei geraden und einer kr. L., dann mit 2 krummen und einer geraden L., die sich in 3 P. vereinigen.

Man kann jetzt, ohne die ganze Reihenfolge von Aufgaben, die hier gegeben werden könnten, erschöpfen zu wollen, einzelne bestimmte Aufgaben ausheben, z. B. folgende oder ihr ähnliche:

Lhr. Verbindet 2 kr. und eine gerade L. in 2 P. so, daß sie 2 Zweiecke bilden.

Lhr. Verbindet 2 gerade und eine kr. L. so in 3 P., daß sie ein Zweieck und ein Dr. bilden.

Lhr. Verbindet 2 kr. und 1 gerade L. so in 5 P., daß sie 3 Dr. bilden. (s. Fig. 97.)

Lhr. Man soll mit Hülfe einer kr. und zweier geraden L. ein Dr. und 2 Zw. bilden.

Nota. Um das Werk nicht zu sehr zu vertheuern, sind besonders bei dem 2ten und 3ten Abschnitte wenigere Figuren hinzugefügt worden.

Zweite Abtheilung.

Größen-Lehre.

I. Abschnitt. Linien und Winkel.

In der Formenlehre war von den verschiedenen Arten der Verbindung von L., von der Anzahl und Art der W. die Rede. Wir beschäftigten uns nur mit der Gestalt oder Form der Figuren und ihrer einzelnen Theile.

Die Größenlehre beschäftigt sich dagegen mit Vergleichung und Ausmessung der Linien, Winkel und Flächen; also mit der Größe der Figuren und ihrer einzelnen Theile.

(Vorläufig muß hier bemerkt werden, daß bei jeder Aufgabe, die mit Hülfe einer Figur gelöst't wird, der Lehrer dieselbe mit freier Hand an die große Wandtafel zeichne, die Kinder aber jedes eine im Wesentlichen gleiche Figur auf seiner Tafel aus freier Hand nachbilden soll, und daß der Lehrer jedesmal nachsehen muß: ob diese Figuren gehörig gezeichnet sind.)

---

1. Stufe. Eigenschaften einer geraden Linie und Veränderungen, die mit ihr vorgenommen werden können durch Hinzu- und Hinwegthun.

Lhr. Jedes Ding, das irgend einen Raum einnimmt, hat auch eine gewisse Größe. Nennt mir einmal solche Dinge!

Kdr. Häuser, Menschen, Thiere, Steine und noch viele andere Dinge.

Lhr. Richtig! Alle diese Dinge haben eine Größe. Sind sie aber alle von gleicher Größe?

Kdr. Nein, ihre Größen sind ungleich.

Lhr. Woher wißt ihr das?

Kdr. Das sehen wir; denn wenn die Dinge neben einander stehen, so ragt eins über das andere weg.

Lhr. Das heißt, sie nehmen ungleichen Raum ein. Wenn die Dinge ungleichen Raum einnehmen, so sind sie von ungleicher Größe. Vergleichen wir aber die Größe immer nur nach dem Raume?

Kdr. Ja, anders können wir wohl nicht die Größe schätzen.

Lhr. Wenn du 12 Jahr, dein Nachbar aber 10 Jahr alt ist, wer von euch hat das größere Alter?

Kdr. Der 12 Jahr alt ist.

Lhr. Habt ihr hier nach dem Raume verglichen?

Kdr. Nein, nach der Zeit. Zwölf Jahr ist mehr Zeit als 10 Jahr.

Lhr. Was ist größer, 8 oder 4? — Kdr. Acht.

Lhr. Wonach urtheilt ihr hier?

Kdr. Acht ist mehr als vier.

Lhr. Hier haben wir nun verschiedene Größen mit einander verglichen, Zahlen, Zeiten und Räume. Welches war die größere?

Kdr. Die mehr Raum, mehr Zeit oder mehr Einheiten in sich faßte.

Lhr. Es kam bei dieser Vergleichung also auf das Mehr oder Weniger an, und anders können wir Größen nicht vergleichen. Ueberall, wo wir nach dem Mehr oder Weniger fragen, haben wir es mit Größen zu thun. Jedes Ding aber, das eine Größe hat, nennt man sehr häufig selbst: eine Größe. Dazu gehören also: Zeiten, Räume, Zahlen, Gewichte, Winkel, Linien u. s. f., welches alles Größen sind.

1ste Aufg. Wem ist die Größe gleich?

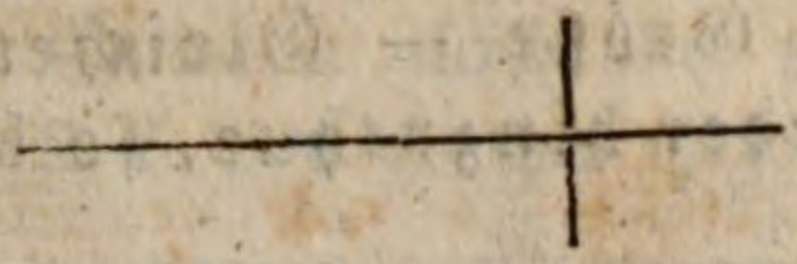
Lhr. (indem er eine gerade L. an die Tafel zeichnet.)

Seht hier diese gerade L., wem ist sie immer gleich? (Die Kinder werden vielleicht antworten): Sie ist jeder geraden L. gleich, die eben so groß ist; darauf entgegne der Lehrer, daß sie dieselbe mit sich selbst vergleichen sollen, oder er sage ihnen

die sehr einfache Wahrheit: Jede L. — so wie jede Größe — ist sich selbst gleich.

2te Aufg. Was für eine Veränderung geht mit einer L. vor durch das Hinwegnehmen?

Lhr. (indem er von der L. einen Theil hinweglöscht.)



Ist die L. nun noch sich selbst gleich, wie sie anfänglich war? — Kdr. Nein, sie ist kleiner geworden.

Lhr. Also jede Größe wird durch das Hinwegthun kleiner.

3te Aufg. Welche Veränderung geht mit einer Linie vor durch das Hinzuthun?

Lhr. (indem er die L. wieder herstellt, und nun sie um ein Stück verlängert.)

Ist jetzt die L. noch eben so groß, wie sie anfänglich war?

Kdr. Nein, sie ist größer geworden.

Lhr. Richtig! Jede Größe wird durch das Hinzuthun größer.

4te Aufg. Man soll angeben, ob eine L. sich verändert, wenn man Gleiches hinzuthut, und Gleiches hinwegnimmt?

Lhr. (indem er eine L. an die Tafel zeichnet.)

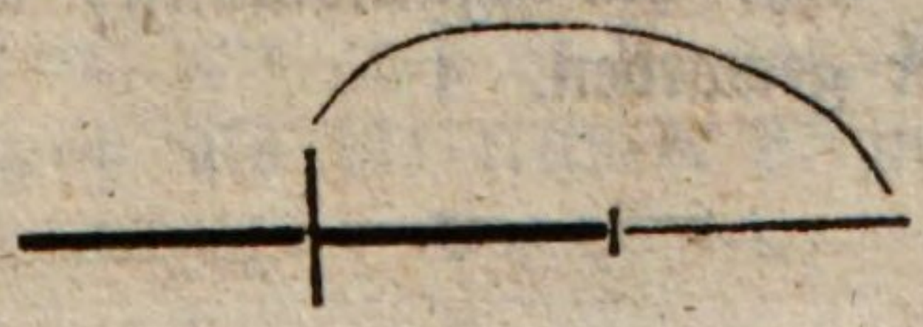
Ich will jetzt ein Stück von beliebiger Größe hinzuthun. (indem er es thut.)

Was wird dadurch geschehen?

Kdr. Die L. wird größer werden.

Lhr. Richtig! Jetzt will ich ein eben so großes Stück auf der andern Seite hinwegnehmen.

(indem er es wirklich thut.)



Wird sich die Größe der L. durch's Hinzu- und Hinwegthun geändert haben?

Kdr. Nein, denn es ist eben so viel hinweggenommen, als hinzugethan worden.

Lhr. Also folgt hieraus allgemein: Wenn ich von einer L. — oder Größe — Gleiches hinwegnehme und Gleiches wieder hinzuthue, so bleibt die Größe unverändert.

Lhr. (indem er eine L. an die Tafel zeichnet, und ein beliebiges Stück hinzufügt.)

5te Aufg. Man soll angeben, was mit einer L. vorgeht, zu der man mehr hinzuthut, als man von ihr hinwegnimmt?

Was ist mit dieser L. hier vorgegangen?

Kdr. Sie ist vergrößert worden.

Lhr. (indem er ein kleineres Stück hinweglöscht.)

Was ich hier hinwegnehme, ist weniger als das, was ich hinzuthue — wird nun die L. unverändert geblieben seyn?

Kdr. Nein, da mehr hinzugethan, als hinweggenommen worden ist, so ist die L. verändert worden, sie ist größer geworden.

6te Aufg. Was geht mit einer L. vor, von der mehr hinweggenommen, als zu ihr hinzugethan wird?

Lhr. (indem er mehr hinwegnimmt, als hinzuthut.)

Ich habe hier mehr hinweggenommen, als hinzugethan — wird die L. jetzt sich gleich geblieben seyn?

Kdr. Es ist mehr hinweggenommen, als hinzugethan, also ist die L. kleiner geworden.

II. Stufe. Vergleichung zweier Linien in Rücksicht der Größe.

7te Aufg. Man soll 2 L. vergleichen, in Hinsicht ihrer Größe.

Lhr. Was können 2 gerade L. seyn, in Absicht auf die Größe? — Kdr. Entweder gleich oder ungleich.

Lhr. Zeichnet 2 L. von gleicher Größe auf eure Tafeln.

Sodann 2 L. von ungleicher Größe.

Lhr. Was läßt sich von diesen beiden L. sagen?

Kdr. Die eine ist größer als die andere.

Die eine ist kleiner als die andere.

Lhr. Und zwar ist die kleinere um so viel kl. wie die größere, als um wie viel die größere größer ist, wie die kleinere. — Wie nennt man das, was die eine Größe mehr beträgt, als die andere?

Kdr. Den Unterschied.

Lhr. Wenn ich den Unterschied von der größeren L. wegnehme, wie groß ist sie dann?

Kdr. So groß, als die kleinere L.

Lhr. Wenn ich diesen Unterschied nun zu der kleineren Linie hinzuthue?

Kdr. Dann wird diese Linie so groß, als vorher die größere war.

Lhr. Aus welchen Stücken ist diese L. nun zusammengesetzt?

Kdr. Aus der kleineren und dem Unterschiede der beiden Linien.

Lhr. Sie ist aber nun so groß als die größere, folglich wird auch die größere L. so groß seyn, als die kleinere und der Unterschied. Wenn ich von der größeren L. die Hälfte des Unterschiedes wegnehme, wie groß ist sie dann?

Kdr. So groß als die kleinere L. und die Hälfte des Unterschiedes.

Lhr. Wenn ich aber den halben Unterschied zur kleineren L. hinzusetze, wie groß ist diese dann?

Kdr. Eben so groß als die vorige; denn sie besteht auch aus der kleineren L. und der Hälfte des Unterschiedes.

Lhr. Die kleine Größe und die Hälfte des Unterschiedes ist daher so groß, als die Hälfte der beiden zusammen genommenen Größen.

Und die große Größe, weniger der Hälfte des Unterschiedes, ist ebenfalls gleich der Hälfte der beiden zusammen genommenen Größen.

III. Stufe. Veränderungen, die mit zwei gleichen Linien vorgehen, durch Hinzuthun oder Hinwegthun.

Lhr. Wir wollen uns nun zuerst mit den L. von gleicher Größe beschäftigen. (Indem er zwei solcher L. an die Wandtafel zeichnet.)

Lhr. Was geschieht durch Hinwegthun in Hinsicht der Größe?

Kdr. Durch das Hinwegthun werden die L. kleiner.

Lhr. Was geschieht durch's Hinzuthun?

Kdr. Durch das Hinzuthun werden die L. größer.

8te Aufg. Man soll Gleiches zu Gleichem hinzuthun.

Lhr. (indem er auf jene 2 L. von gleicher Größe an der Tafel hinzeigt.) Hier sind 2 gleich große L.; ich will jetzt die eine verlängern:

---

und dann die andere um eben so viel, als die 1ste:

Was habe ich mit beiden L. vorgenommen?

Kdr. Die eine um eben so viel vergrößert, als die andere.

Lhr. Oder: Ich habe Gleiches zu Gleichem hinzugethan. Was habe ich bekommen, Gleiches oder Ungleiches?

Kdr. Gleiches.

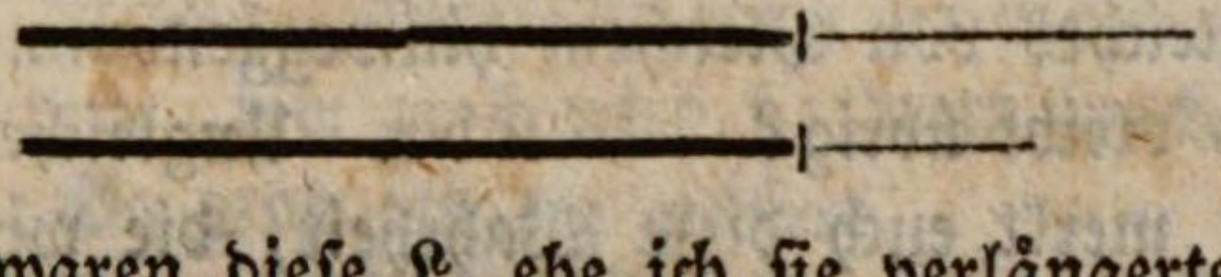
Lhr. Was folgt daraus?

Kdr. Gleiches zu Gleichem hinzugethan, giebt Gleiches.

Lhr. Wiederholt das alle.

9te Aufg. Man soll Ungleiches zu Gleichem hinzuthun.

Lhr. (indem er abermals 2 L. von gleicher Größe an die Tafel zeichnet, sodann beide verlängert, allein die eine um ein größeres Stück, als die andere.)



Was waren diese L. ehe ich sie verlängerte?

Kdr. Sie waren von gleicher Größe.

Lhr. Was habe ich mit ihnen vorgenommen?

Kdr. Ungleiches hinzugethan.

Lhr. Richtig! Was habe ich bekommen?

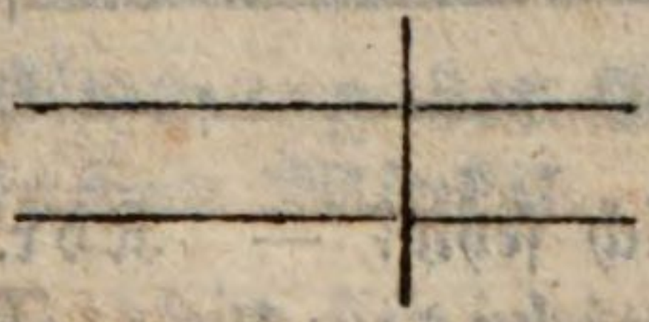
Kdr. L. von ungleicher Größe.

Lhr. Was für eine Wahrheit folgt hieraus wohl?

Kdr. Ungleiches zu Gleichem hinzugethan, giebt Ungleiches.

10te Aufg. Man soll Gleiches von Gleichem hinwegnehmen.

Lhr. Jetzt will ich hier abermals 2 L. ziehen (indem er 2 L. von gleicher Größe zeichnet, und von beiden gleich viel hinwegnimmt.)



Was habe ich jetzt gethan?

Kdr. Gleiches von Gleichem hinweggenommen.

Lhr. Bleibt mir Gleiches oder Ungleiches?

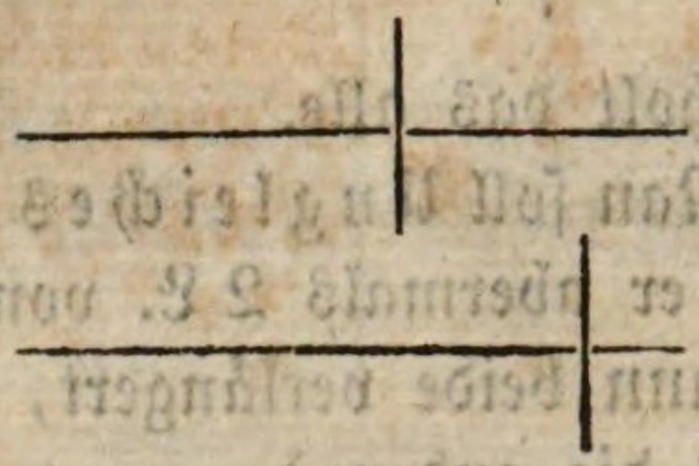
Kdr. Es bleibt Gleiches.

Lhr. Was folgt hieraus also allgemein?

Kdr. Gleiches von Gleichem hinweggenommen, giebt Gleiches.

11te Aufg. Man soll Ungleiches von Gleichem hinwegnehmen.

Lhr. (indem er bei 2 L. von gleicher Größe von der einen mehr, von der andern weniger hinwegnimmt.)



Was habe ich hier gethan?

Kdr. Ungleiches von Gleichem hinweggenommen.

Lhr. Was bleibt übrig? — Kdr. Ungleiches.

Lhr. Also merkt euch diese Wahrheit, die wir eben fanden; wer spricht sie aus?

Kdr. Wenn ich Ungleiches von Gleichem hinwegnehme, so bleibt Ungleiches übrig.

12te Aufg. Man soll Gleiches zu Ungleichem hinzuthun.

Lhr. Jetzt wollen wir dasselbe mit ungleichen L. versuchen. (indem er 2 L. von ungleicher Größe an die Tafel zeichnet.)

Wie sind diese L. beschaffen?

Kdr. Sie sind von ungleicher Größe.

Lhr. Ich will jetzt zu beiden hinzuthun, und zwar zu der einen eben so viel, als zu der andern;

werden jetzt beide gleich seyn? — Kdr. Nein.

Lhr. Also: Gleiches zu Ungleichem hinzugethan, giebt Ungleiches. Wiederholt das alle!

13te Aufg. Man soll Ungl. zu Ungl. hinzuthun.

Lhr. Wenn ich nun aber zu diesen beiden L. von ungleicher Größe Ungleiches hinzuthue, werden die L. sodann gleich oder ungleich werden?

Kdr. Sie können gl. werden, aber auch ungl.

Lhr. Wann werden sie gleich werden?

(Diese Frage werden die Kinder nicht so schnell beantworten können; der Lehrer suche sie auf folgende Art darauf zu führen — indem er auf 2 L. von ungleicher Größe zeigt.)

Was bemerkt ihr an diesen beiden L.?

Kdr. Die eine ist größer als die andere.

Lhr. Um was ist sie größer?

Kdr. Die gr. L. ist um den Unterschied größer, als die kl. (Die Kinder wissen das aus dem Unterrichte im Rechnen und aus den Aufgaben der 3ten Stufe.)

Lhr. Richtig. Wenn ich nun zu der kleinern den Unterschied hinzuthue, wie groß wird sie dann werden?

Kdr. So groß als die größere.

Lhr. Dann wären also beide gleich. Wenn ich nun zu der größern ein Stück hinzufüge und zu der kleinern ein eben so großes Stück, aber außerdem noch so viel, als der Unterschied beträgt, so müssen beide gleich groß werden.

Also folgt hieraus: Wenn ich zu Ungl. Ungl. hinzuthue, so bekomme ich Ungl. oder Gl. — Gl. bekomme ich nur dann, wenn ich zu der kl. L. um eben so viel mehr hinzuthue, als zu der gr., als um so viel sie kleiner war, als die gr. Dasselbe kann nun mit dem Hinwegthun von ungl. L. vorgenommen werden.

IV. Stufe. Bestimmung des Maaßes der einfachen Winkel.

Lhr. Der rechte W. bleibt sich immer gleich — sein Maaß ist unveränderlich — darum wollen wir sein Maaß zum Grunde legen, wenn wir das Maaß anderer W. bestimmen wollen.

14te Aufg. Was ist das größte und was das kleinste Maaß eines sp. W.? Wißt ihr noch, was ein sp. W. ist in Vergleichung mit dem r. W.?

Kdr. Der spitze W. ist kleiner als ein r.

Lhr. Das kleinste Maaß des sp. W. ist etwas mehr als Nichts. Seht diese Zeichnung hier! (auf einen sehr sp. W. deutend) (s. Fig. 1.) Wenn ich jetzt den einen Sch. des W. immer näher zum andern hinneigen wollte, was würde zuletzt geschehen?

Kdr. Zuletzt würde er mit diesem Sch. zusammen fallen.

Lhr. Wäre es dann noch ein W.?

Kdr. Nein! Es wäre dann eine L.

Lhr. Richtig! Soll es also ein W. bleiben, so muß sein Maaß immer etwas mehr als nichts betragen.

15te Aufg. Was ist das kleinste und was das größte Maaß eines st. W.?

Kdr. Das Maaß eines st. W. beträgt immer mehr als das Maaß eines r. W.

Lhr. Kann ein st. W. wohl das Maaß von zwei r. W. erreichen? — Kdr. Nein!

Lhr. Warum nicht? (Schwerlich werden es die Kinder zu sagen wissen;) dann suche er es ihnen allenfalls auf folgende Art begreiflich zu machen; indem er einen sehr st. W. an die Tafel zeichnet (s. Fig. 2.) Seht hier einen st. W., der größer ist, als ein r. W. (indem er eine L. ad vom Sch.P. des W. aus zieht, die mit dem einen Sch. einen rechten W. bildet.) (s. Fig. 3.)

Jetzt ist der st. W. in 2 W. getheilt, einen r. und einen sp. W. Wenn ich jetzt den Sch. ac noch weiter von ad entfernte, so daß der sp. W. noch größer würde, so bliebe er doch immer kl. als ein r. W.; denn was würde geschehen, wenn ich ihn bis zum r. W. vergrößern wollte?

Kdr. Dann fielen die beiden Sch. des st. W. in eine L., und es wäre kein W. mehr vorhanden.

Lhr. Also ist jeder st. W. kl. als 2 r. W. (Es ist gut, wenn man die Kinder gewöhnt, sich die L. oder Sch. als beweglich zu denken, und so im Geiste neue Formen entstehen zu lassen.)

V. Stufe. Bestimmung des Maaßes der Nebenwinkel.

16te Aufg. Wie viel beträgt die Summe zweier N. W.?

(Die Kinder werden das nicht sogleich zu beantworten wissen; der Lehrer lasse sie daher nur N. W. auf ihre Tafeln zeichnen, da sie dann bald darauf kommen werden, daß das Maaß zweier N. W. immer 2 r. W. beträgt; es kann aber auch auf folgende Art erläutert werden.)

Lhr. (indem er einen r. W. an die Tafel zeichnet und den einen Sch. verlängert) (s. Fig. 4.) Was ist der N. W. eines r. W.? — Kdr. Der N. W. eines r. W. ist ein r. W.

Lhr. Also haben wir hier (Fig. 4) 2 r. W.

Lhr. (indem er den einen dieser W. durch eine L., die er aus ihrem Sch. P. zieht, in 2 Theile theilt.) (s. Fig. 5.)

Jetzt denkt euch den Sch. AD hinweg, so haben wir wieder 2 N. W., wovon aber der eine ein st., der andere ein sp. W. ist.

Der st. W. ist um den W. a gr. als der r. W.

Um wie viel ist nun wohl der sp. W. kl., als der r. W.?

Kdr. Der sp. W. ist um den nemlichen W. a kleiner, als ein r. W.

Lhr. Ich habe von dem einen r. W. den W. a hinweg- und denselben W. a zu dem andern r. W. hinzugethan. Hat sich da das Maaß dieser W., die 2 r. W. betrugen, verändert?

Kdr. Nein!

Lhr. Also beträgt das Maaß zweier N. W. immer 2 r. W.

Ich könnte auch sagen: Bei 2 N. W. beträgt der st. W. immer um so viel mehr als ein r. W., als der sp. W. weniger als ein r. W. beträgt; folglich betragen beide zusammen 2 r. W.

Wenn ich jeden dieser r. W. durch L. in 2, 8 oder mehrere W. theile, betragen diese W. zusammengenommen mehr als 2 r. W.? (s. Fig. 5*)

Kdr. Nein, sie betragen nur 2 r. W.

VI. Stufe. Bestimmung des Maaßes der Scheitelwinkel und der Gleichheit und Ungleichheit derselben.

Lhr. (Indem er Fig. 6 an die Tafel zeichnet.)

17te Aufg. Wie viel wird das Maaß von 4 Sch. W. betragen? — Kdr. Das Maaß von 4 Sch. W. beträgt 4 r. W.

Lhr. Warum?

Kdr. (Fig. 6 auf die Tafel zeichnend.) a und b sind ein Paar N. W., ihr Maaß beträgt also 2 r. W.; c und d sind auch N. W., ihr Maaß beträgt also 2 r. W.; c und d sind auch N. W., also beträgt ihr Maaß ebenfalls 2 r. W, mithin betragen alle 4 Sch. W. 2×2 r. W. $=$ 4 r. W.

Lhr. Aber wie steht es um die Gleichheit und Ungleichheit der W.? — Kdr. Alle 4 W. können gleich seyn.

Lhr. Wann ist das der Fall?

Kdr. Wenn sie sich unter r. W. schneiden.

Lhr. Richtig! Giebt es nur diesen einzigen Fall?

Kdr. Es giebt noch einen Fall, wenn sich die L. so schneiden, daß sie sp. und st. W. bilden.

18te Aufg. Sind die Sch. W. gleich oder ungleich?

Antw. Bei einem Paare von Sch. W. ist immer der eine dem andern gleich.

Lhr. Beweist mir das?

Kdr. (auf Fig. 6 zeigend) a + b als N. W. $=$ 2 r. W., a + d ebenfalls als N. W. $=$ 2 r. W., ziehe ich nun a von a + d und a von a + b ab, so habe ich Gleiches von Gleichem abgezogen, und es bleibt also Gleiches übrig; es bleibt aber dort W. b, hier W. d übrig, also ist d $=$ b. — Eben so W. a $=$ W. c.

Hieraus folgt allgemein: Alle Scheitel-Winkel sind einander gleich.

Lhr. Wenn ich jetzt noch mehrere L. durch den Durchschnitts-P. der beiden L. ziehe, welche die Sch. W. bilden, wie viele W. wird sodann ihr Maaß betragen?

Kdr. Ebenfalls 4 r. W., weil sie nur Theile der Sch. W. sind, deren Summe $=$ 4 r. W. ist.

VII. Stufe. Bestimmung des Maaßes der Gegenwinkel und der Gleichheit oder Ungleichheit derselben.

19te Aufg. Man soll das Maaß zweier Gegenw. bei gleichlaufenden L. bestimmen: a) wenn beide W. gleich sind.

(Die Kinder werden diese Aufg. nicht sogleich zu beantworten wissen; der Lehrer führe sie darauf, wie folgt:)

Wir haben hier Taf. XV, Fig. 68 ein Paar Nebenwinkel; beides sind rechte W. Stellen wir uns nun einmal vor, die L. ab veränderte sich so, daß sie breit würde, indem wir sie nach ihrer ganzen Länge nach der Richtung mn, aber überall auf gleiche Weise und in gleichem Maaße, ausdehnten, wie in Fig. 69 geschehen, so würde sie eine Fläche werden und zwei gleichlaufende Seiten op und qr erhalten müssen. Beide hätten dieselbe Richtung, als vorher die Linie ab in Fig. 68. Beide müssen also auch mit mn dieselben Winkel machen, wie vorher; denn von der Richtung der L. ab gegen mn hängt ja die Größe der W. c und d ab. Daher sind nun in Fig. 69 die beiden Winkel c und d zwar aus einander gerückt, aber noch so groß als in Fig. 68.

Zeichnen wir aus der Fig. 69 nur die beiden Seiten op und qr, wie in Fig. 70, so werden diese gleichlaufende Linien werden, die mit mn immer noch dieselben Winkel c und d machen, wie vorher. Diese beiden W. sind aber äußere G.W., und daher können wir die äußern G.W. als aus einander gerückte N.W. betrachten.

Wenn daher c ein r. W. ist, so muß d ebenfalls ein r. W. seyn, sobald die beiden L. op und qr gll. L. sind.

Sind nun c und d r. W., so müssen auch e und f r. W. seyn; denn sie sind die N.W. zweier r. W.

In diesem Falle also beträgt das Maaß sowohl der äußeren als der inneren G.W. 2 r. W.

20ste Aufg. Man soll das Maaß zweier G.W. bestimmen: b) wenn beide W. ungleich sind.

Lhr. Denken wir uns in den vorigen Figuren die L. mn nicht rechtwinklig, die Linie ab oder op, qr schneidend, so werden auch in Fig. 68 c und d nicht r. W. seyn, und ebne darum auch nicht in Fig. 69 und 70. Was für W. sind es nun?

Kdr. Der eine ist ein spitzer, der andere ist ein stumpfer.

Lhr. Gut, wie viel betragen aber beide zusammen?

Kdr. Sie betragen in Fig. 68 2 r. W., und da sie in Fig. 70 eben so groß sind, so müssen sie auch hier 2 r. W. betragen.

Lhr. (zeichnet Fig. 71 Taf. XV.) Wie viel werden aber die inneren G.W. betragen? — Kdr. W. e ist gleich dem W. d.

Lhr. Warum?

Kdr. Weil op sich wie qr gegen mn neigt.

Lhr. Oder auch, weil c + e eben so viel als c + d, denn beide betragen 2 r. — Setze ich zum W. c den W. e, so erhalte ich eben so viel, als wenn ich den W. d zum W. c hinzusetze; ich muß daher wohl Gleiches hinzugesetzt haben. Warum?

Kdr. Weil nur Gleiches zum Gleichen hinzugesetzt, Gleiches giebt.

Lhr. Dann wird auch wohl W. f = W. c seyn?

Kdr. Ja! Denn d + c sind 2 r. W. und d + f auch. Ich habe also zum W. d Gleiches hinzugesetzt, nemlich die W. f und e.

Lhr. Wie groß sind daher f + e oder die inneren G. W.?

Kdr. So groß als c + d oder die äußeren G. W., nemlich 2 r. W.

Lhr. Wir könnten dieß auch so beweisen. (er zeichnet ein Paar G. W. an die Wandtafel.) (s. Fig. 7 Taf. IV.)

Ich ziehe hier (indem er L. AE und BF rechtwinklich von AB zieht) diese beiden H. L., die mit AB r. W. bilden. Um was ist derjenige von den beiden G. W., der ein sp. W. ist, kleiner als ein r. W.?

Kdr. Der sp. von den beiden G. W. ist um den W. m kl. als ein r. W.

Lhr. Um was ist der st. größer als ein r. W.?

Kdr. Der st. ꝛc. ist um den W. o gr. als ein r. W.

Lhr. Richtig! da aber die beiden Sch. hier (auf AC und BD zeigend) gll. sind, so entfernen sich beide um gleichviel von den rwkl. L. AE und BF, folglich sind die W. m und o gleich. Wie viel wird nun das Maaß der beiden G. W. betragen?

Kdr. 2 r. W., denn der sp. G. W. ist um den W. m

kl. als ein r. W.; der st. W. um den W. n (= m) gr. als ein r. W., folglich fehlt von dem einen r. W. eben so viel, als bei dem andern mehr vorhanden ist, als ein r. W.; mithin betragen beide 2 r. W.

Lhr. Hieraus folgt allgemein: Das Maaß zweier G. W. bei gll. L. beträgt 2 r. W., und umgekehrt: Beträgt das Maaß zweier G. W. 2 r. W., so sind die Linien gleichlaufend.

VIII. Stufe. Bestimmung der Gleichheit oder Ungleichheit der äußern G. W. mit den innern, durch Hülfe ihres Maaßes.

22ste Aufg. Wie verhält sich der äußere G. W. zu dem innern, der nicht sein N. W. ist?

(Wenn gleich diese Aufgabe durch die vorige als erledigt scheint, so wird es doch gut seyn, sie als besondern Satz hier nochmals zu entwickeln. Ueberhaupt ist es rathsam, die Kinder nicht zu rasch über diese Sätze hinweg zu führen.)

Lhr. (indem er auf Fig. 8 deutet). Ich verlängere hier L. AB bis C, so ist W. o ein äußerer G. W; wird er wohl einem der innern G. W. m oder x gleich seyn?

Kdr. Ja, dem W. x.

Lhr. Warum? — Kdr. Das lehrt der Augenschein.

Lhr. In der Größenlehre ist der Augenschein kein Beweis. Wir wollen versuchen, ob wir es nicht ordentlich beweisen können. Hat W. c einen N. W.?

Kdr. Ja, W. m ist sein N. W.

Lhr. Wie viel beträgt das Maaß zweier N. W.?

Kdr. Das Maaß zweier N. W. beträgt 2 r. W.

Lhr. Richtig! Wie viel beträgt das Maaß zweier G. W. bei gll. L.?

Kdr. Das Maaß zweier G. W. bei gll. L. beträgt auch 2 r. W.

Lhr. Nun ist W. m sich selbst gleich, ziehe ich ihn von den beiden N. W., d. h. von m + o ab, so bleibt übrig?

Kdr. W. o.

Lhr. Ziehe ich ihn von den beiden G.W., d. h. von m + x ab, was bleibt dann übrig? — Kdr. W. x.

Lhr. In beiden Fällen habe ich nun den W. m von 2 r. W. abgezogen, also Gleiches von Gleichem — was bleibt übrig? — Kdr. Gleiches.

Lhr. Also, da mir Gleiches übrig bleibt, und da dort der W. o, hier der W. x übrig blieb, so ist W. o = W. x. Also folgt:

Der äußere G.W. ist dem innern G.W., mit dem er nicht N.W. ist, gleich, wenn die L. gll. sind.

IX. Stufe. Bestimmung der Gleichheit oder Ungleichheit der Wechsel-Winkel in Hinsicht ihres Maaßes.

23ste Aufg. Sind W.W. bei gll. L. einander gleich? (s. Fig. 9 und 10.) — Kdr. Sie sind gleich.

Lhr. Könnt ihr es beweisen? (wahrscheinlich fallen die Kinder von selbst auf den folgenden Beweis.)

Ein Kd. Ich verlängere zuerst den einen Sch., so daß er mit dem andern ein Paar G.W. bildet (s. Fig. 10), dann betragen a und o, als G.W. bei gll. L., 2 r. W., o und n betragen als N.W. gleichfalls 2 r. W — ziehe ich o von der Summe der N.W., und o von der Summe der G.W. ab, so habe ich Gleiches von Gleichem abgezogen, und es bleibt Gleiches übrig, also a = u.

Eben so kann der Lehrer leicht zeigen, daß auch die äußeren W.W. einander gleich sind, da diese eigentlich nichts anderes, als aus einander gerückte Scheitel-W. sind, wie sich aus den Fig. 69 und 70 Taf. XV. leicht ergiebt.

Lhr. Es folgt also allgemein: W.W. von gll. L. gebildet, sind einander gleich, und umgekehrt:

Sind W.W. gleich, so werden sie von gll. L. gebildet.

X. Stufe. Bestimmung der Gleichheit der W. bei der Verbindung dreier L., so daß sie 4 W. bilden.

1) Wenn 2 L. gll. sind.

24ste Aufg. Es frägt sich: In welchem Falle bei der Verbindung zweier gll. L. mit einer dritten, so daß sie 4 W. bilden, diese W. gleich seyn werden?

Ein Kd. (indem es Fig. 11 an die Tafel zeichnet.)

Die L. AB ist rechtwinklicht gezogen, also sind a und b r. W., und da CD mit EF gll. ist, so ist c, als G.W. von b, ebenfalls ein r. W., oder auch als W.W. von a; eben so d, als N.W. von c, als G.W. von a, als W.W. von b.

Folglich sind alle 4 W. r. W. und mithin gleich.

25ste Aufg. Es frägt sich: In welchem Falle, bei der Verbindung zweier gll. L. mit einer dritten, so daß sie 4 W. bilden, von diesen W. 2 Paar unter sich gleich seyn müssen?

Kdr. Wenn die ungll. L. nicht rwkl. gezogen ist, dann sind nur 2 und 2 W. gleich.

Lhr. Wer es beweisen kann, trete an die Wandtafel.

Ein Kd. (indem es Fig. 12 an die Tafel zeichnet).

L. AB ist nicht rechtwinklich gezogen, bildet also st. und sp. W.; W. a = b, als W.W. bei gll. L.; W. c = d als W.W. bei gll. L., oder auch als N.W. der gleichen W. a und b; W. d und c sind aber, als sp. W. ungleich a und b, als st. W.

2) Wenn 2 L. ungleichlaufend sind.

Dies kann füglich übergangen werden, da es zu keinen wichtigen Resultaten führt.

Uebungsaufgabe zur Einübung des Vorigen.

26ste Aufg. In den Figuren 107 und 108 (Taf. XVIII) sollen aufgesucht werden:

I. Alle diejenigen Winkel, welche sich gleich sind, als:

a) alle Scheitelwinkel
b) alle äußere Wechselwinkel
c) alle innere Wechselwinkel
d) ein innerer und ein äußerer G.W., die nicht N.W. sind

} bei gll. L.

II. Alle diejenigen W., deren Summe 2 r. W. beträgt, als:

a) alle Nebenwinkel
b) alle äußere G. W. } bei gll. L.
c) alle innere G. W.

Fig. 107. Voraussetzung: fe ∦ gh, ab ∦ cd.

Gleich sind: a) Scheitelwinkel.

k = p
o = l
m = r
n = q
s = x
t = w
u = z
y = v

b) Aeußere W. W.

k = x
l = w
m = z
n = y
n = o
r = k
v = w
z = s

c) Innere W. W.

o = t
p = s
q = v
r = u
m = p
l = q
t = y
u = x

d) Ein innerer und ein äußerer Gegenwinkel, die nicht N. W. sind.

k = s
l = t
m = u
n = v
n = l
r = p
v = t
z = x
z = r
y = q
x = p
w = o
w = y
s = u
o = q
k = m

Zwei rechte W. betragen:

a) als Nebenwinkel,

k + l, l + p, p + o, o + k,
t + x, x + w, w + s, s + t,
m + n, n + r, r + q, q + m,
u + v, v + z, z + y, y + u;

b) als äußere Gegenwinkel:
k + w, l + x, m + y, n + z,
n + k, r + o, v + s, z + w;
c) als innere Gegenwinkel:
o + s, p + t, q + u, r + v,
l + m, p + q, t + u, x + y.

Zu Figur 108 Voraussetzung ab ∥ cd.

Gleich sind: a) als Scheitelwinkel, b) als äußere W. W.

e = l
f = k
g = h
m = r
n = q
o = t
p = s

e = d
e + f = r
g = q
f + g = s.

c) als innere Wechselw.:
h = n
h + k = p
l = o
l + k = m;

d) ein innerer und ein äußerer G. W., die nicht N. W. sind:
e = o, e + f = m, f + g = p, g = n,
t = l, s = k + h, r = k + l, q = h.

Zwei rechte W. betragen:

a) als Nebenwinkel:
e + f + g, f + g + l, g + l + k, l + k + h,
k + h + e, h + e + f,
m + n, n + r, r + q, q + m, o + p, p + t,
t + s, s + o;

b) als äußere Gegenwinkel:
e + s, e + f + q, g + f + t, g + r;

c) als innere Gegenwinkel:
h + m, h + k + o, l + p, l + k + n.

III. Abschnitt. Vergleichung der Winkel und Seiten geschlossener Figuren.

XI. Stufe. Bestimmung der Summe des Maaßes der Winkel eines Dreiecks.

27ste Aufg. Es frägt sich: Wie viel die Summe der drei W. eines Dr. betragen werde?

(Sollten die Kinder diese Aufgabe nicht zu lösen wissen, so komme ihnen der Lehrer auf folgende Art zu Hülfe.)

Lhr. Dies Dr. (s. Fig. 13, Tafel IV) kann ein rwkl., ein stwkl. oder ein spwkl. seyn, das gilt gleich (indem er gll. mit irgend einer Seite des Dr. durch den Sch. P. des ihr gegenüberstehenden W. eine L. zieht.)

Ich ziehe die L. DE hier gll. mit der S. AB des Dr.; wie viele W. sind nun hier? — Kdr. Fünf Winkel.

Lhr. Wie viel beträgt das Maaß der W. d, a, f zusammen? — Kdr. Zwei r. W.

Lhr. Warum?

Kdr. Sie liegen innerhalb zweier Sch., die in eine Linie zusammen fallen.

Lhr. Ist W. f einem der andern W. gleich?

Kdr. Ja! W. f ist = W. c als W. W. bei gll. L.

Lhr. Ist noch ein anderer W. vorhanden, der W. b gleich wäre?

Kdr. W. d ist = W. b aus demselben Grunde.

Lhr. Wem ist W. a gleich?

Kdr. W. a ist keinem andern W. gleich.

Lhr. Er kann einem andern W. gleich seyn oder nicht, das ist hier gleichgültig, aber sich selbst ist er gleich. — Könnt ihr mir nun sagen, wie viel die W. des Dr. zusammen betragen?

Kdr. Ja, die Summe aller 3 W. des Dr. ist gleich 2 r. W., denn $d + a + f = 2$ r. W., $a = a$, $d = b$, $f = c$, also auch: $b + c + a = 2$ r. W.

Diese Wahrheit, daß die Summe der Winkel im Dreieck = 2 r. W. sey, läßt sich auch auf andere Weise aus den bisher bekannten W. schließen.

Auflös. Man ziehe (Fig. 109, Tafel XVIII) die L. mn gll. ac, so sind x+b+a als innere G.W.=2 r. W., da nun x als W.W.=c, so sind x+b+a=c+b+a, also müssen auch c+b+a=2 r. W. seyn.

Sucht selbst die Beweise zu Fig. 110 aus den W. x, m, n, wenn zwei Seiten des Dr. verlängert sind und eine Hülfsl. gll. mit der dritten Dreiecksseite gezogen ist. Ferner zu Fig. 111, wenn L. de gll. S. ab und L. fo gll. S. bc ist.

XII. Stufe. Vergleichung des Maaßes der Außenwinkel eines Dr. mit dem Maaße der innern W.

Erklärung. Wenn man eine S. des Dr. verlängert, so entsteht außerhalb desselben ein W., welcher der Außenwinkel des Dr. heißt. In Fig. 14, Tafel IV ist x ein solcher Außen-W.

28ste Aufg. Es frägt sich, welches Maaß der äußere W. eines Dr. in Vergleichung mit den drei innern W. des Dr. habe?

Kdr. Er ist immer kl. als die 3 innern W. zusammengenommen.

Lhr. Warum?

Kdr. Er kann so groß seyn, als er will, so beträgt sein Maaß immer weniger als 2 r. W., nun ist die Summe aller 3 W. eines Dr. immer gleich 2 r. W., also beträgt das Maaß des Außenw. eines Dr. weniger als das Maaß der Summe aller 3 innern W.

Lhr. Wie wird er sich nun zu seinem N.W. a verhalten? (auf Fig. 14 zeigend.)

Kdr. Er kann ihm gleich seyn oder größer oder kleiner.

Lhr. Wenn ist er ihm gleich?

Kdr. Wenn W. x ein r. W. ist.

Lhr. Warum?

Kdr. Der N.W. eines r. W. ist ein r. W.

Lhr. Gilt dasselbe bei den beiden andern W. b und c? oder kann W. x gleich seyn W. b oder W. c?

(Die Kinder werden vielleicht diese Frage nicht zu be-

antworten wissen; in diesem Falle suche sie der Lehrer auf folgende Weise auf die richtige Beantwortung zu leiten, indem er Fig. 14 nochmals an die Tafel zeichnet.)

Mit dem Maaße welches W. sollen wir das Maaß des W. x vergleichen?

Kdr. Mit dem Maaße des W. b oder des W. c.

Lhr. Wir wollen also eine L. EC gll. mit der S. AB ziehen, dann ist W. m = welchem W.?

Kdr. W. m = c als W. W. bei gll. L.

Lhr. Nun ist der ganze W. x um W. n größer als m, also auch um n größer als c, mithin kann er c nicht gleich seyn. Wem ist nun W. n gleich?

Kdr. W. n = b; als äußerer G. W. bei gll. L.

Lhr. Also ist der ganze W. x, da er aus m und n besteht, gr. als W. b, und zwar um den W. m. Welchen beiden W. wird nun aber W. x gleich seyn?

Kdr. W. x ist = c + b.

Lhr. Warum?

Kdr. W. x = m + n; W. m = W. c, W. n = b; also auch x = c + b.

Lhr. Richtig! Daraus folgt nun im Allgemeinen folgende Wahrheit:

Das Maaß jedes Außen-W. eines Dr. ist gleich der Summe des Maaßes der beiden innern W., die nicht seine N. W. sind.

Es giebt indessen noch eine andere Art, diese Wahrheit zu beweisen, so daß ich keiner H. L. bedarf, wer findet mir dieselbe?

(Sollten die Kinder nicht von selbst darauf kommen, so verfahre der Lehrer auf folgende Art.)

Lhr. Wie groß ist das Maaß zweier N. W. immer?

Kdr. Zwei N. W. betragen immer 2 r. W.

Lhr. Richtig! Wie groß ist nun das Maaß der Summe aller innern W. eines Dr.?

Kdr. Das Maaß der innern W. eines Dr. ist gleich 2 rechten W.

Lhr. Seht hier! W. a hat eine doppelte Eigenschaft: er ist innerer W. des Dr. und ist auch N. W. des W. x. Wißt ihr mir jetzt unsern Satz zu beweisen?

Kdr. W. a ist sich selbst gleich; ziehe ich ihn von der Summe der 3 W. des Dr. ab, so bleiben mir W. b und c übrig; ziehe ich ihn von der Summe der beiden N. W. (a und x) ab, so bleibt mir W. x übrig. Nun war das Maaß jener 3 W. = 2 r. W. Das Maaß der beiden N. W. auch gleich 2 r. W. Ziehe ich von beiden den W. a ab, so habe ich Gleiches von Gleichem abgezogen, es bleibt mir also Gleiches; also ist W. x = W. c + b.

29ste Aufg. Es frägt sich: Wie sich das Maaß der Summe zweier A. W. eines Dr. zu dem Maaße der innern W. desselben Dr. verhalte? (s. Fig. 15.)

Antw. Die Summe der beiden äußern W. eines Dr. ist gleich der Summe der innern W. + dem W. des Dr., der nicht N. W. der beiden äußern W. ist.

Beweis. W. a ist = m + d, W. b = m + c. Also a + b = c + d + 2m, oder gleich den 3 innern W. + W. m, oder mehr dem W., der nicht N. W. eines der beiden A. W. ist.

30ste Aufg. Wie groß sind 3 A. W. eines Dr., verglichen mit den innern W. des Dr.?

Antw. Zwei Mal so groß, oder = 4 r. W.

Beweis. Die A. W. und die inneren W. bilden 3 Paar N. W., betragen also 6 r. W. Da nun die inneren W. zwei r. W. betragen, so bleiben für die A. W. noch 4 r. W., welche demnach zwei Mal so viel betragen, als die inneren.

XIII. Stufe. Bestimmung des Maaßes der Winkel im Dreieck unter gegebenen Bedingungen.

31ste Aufg. Wenn in einem Dreiecke alle Winkel gleich groß sind, wie groß ist dann ein Winkel, verglichen mit einem rechten W.? — Antw. $\frac{2}{3}$ eines r. W.

Auflös. Wenn alle 3 W. gleich sind, so ist einer der dritte Theil von allen dreien. Alle 3 betragen aber 2 r. W., folglich ist einer der dritte Theil von 2 r. W. Der dritte Theil von einem r. W. ist ein Drittel, der dritte Theil von 2 r. W. muß aber noch einmal so viel seyn, also $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels betragen.

Lhr. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel so groß ist, als die beiden andern zusammen genommen, diese beiden sind aber einander gleich, wie groß ist jeder Winkel im Verhältniß zum r. W.?

Kdr. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel so groß ist, als 2 andere, so beträgt er die Hälfte von dem, was alle betragen, also die Hälfte von 2 r. W., folglich ist er ein rechter W. Da die andern beiden einander gleich sind, so ist jeder ein halber r. W.

Lhr. Wenn nun in einem Dreiecke der zweite W. 2mal so groß als der erste, der dritte aber 3mal so groß als der erste wäre, wie groß wäre dann jeder Winkel?

Kdr. Wenn ich den 3ten W. in 3, den 2ten aber in 2 gleiche Theile theilte, so wäre jeder einzelne Theil so groß als der erste Winkel; ich hätte also 6 gleiche Theile, von welchen der erste Winkel der 6te Theil wäre. Alle betragen zusammen 2 r. W. Daher ist der erste W. der 6te Theil von zwei r. W. $=\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$ eines r. W., der 2te $\frac{2}{3}$ und der dritte $\frac{3}{3}$ oder ein rechter W.

Lhr. Gesetzt nun, ich hätte ein Dreieck, darin wären 2 gleiche W., der dritte W. hätte 2 solche Theile, wie jeder der vorigen 3 hat. Ich theile diesen letzten W. in 2 gleiche Theile, so werden noch ein Paar neue Winkel entstehen; lassen sich jetzt alle Winkel bestimmen?

Kdr. O ja. Suchen wir wie vorher erst die Winkel, welche gegeben sind, so wird jeder der gleichen W. $\frac{3}{4}$ eines rechten W. betragen; die Hälfte des 3ten ist $\frac{1}{4}$ eines r. W. und jeder von den neu entstandenen W. ein r. W.

Anmerk. Der Lehrer kann mehrere ähnliche Beispiele geben, auch die Zahl der theilenden Linien zunehmen, und selbige sich kreuzen lassen. Doch wird dies davon abhängen, wie weit die Kinder bereits im Rechnen gekommen.

XIV. Stufe. Gleichheit und Ungleichheit der W., die dadurch entstehen, daß man in gegebenen Figuren eine L. zieht, welche einen W. theilt.

32ste Aufg. In einem gleichwinklichen Dr. soll man von dem Sch. P. des einen W. zur gegenüberstehenden S. eine L. ziehen, die den W. in 2 gleiche Theile theilt, es frägt sich, was sodann in Hinsicht der Gleichheit und Ungleichheit der übrigen W. Statt finden wird?

Antw. Dann sind 3 mal 2 W. gleich.

(Sollten die Kinder den Beweis nicht selbst finden, so verfahre der Lehrer auf folgende Art:)

Lhr. (indem er Fig. 25 an die Tafel zeichnet.) Was geschieht durch L. **AD**?

Kdr. Der W. bei **A** wird in 2 gleiche Theile getheilt.

Lhr. Sonst nichts?

Kdr. Das Dr. **ABC** wird in 2 Dr. getheilt, **ABD** und **CAD**.

Lhr. Entstehen auch neue W.?

Kdr. Ja, bei **D** 2 N. W.

Lhr. Wir wollen alle W. mit Buchstaben bezeichnen. (s. die Fig.) Jetzt sucht die Gleichheit der W. auf.

Lhr. Wem ist W. a = ? — Kdr. W. a = b.

Lhr. Wem ist W. n = ? — Kdr. W. n = m.

Lhr. Kann n nicht auch gleich seyn a?

Kdr. Nein, denn n = $\frac{2}{3}$ r. W., a aber = der Hälfte von $\frac{2}{3}$ oder = $\frac{1}{3}$.

Lhr. Werden nun c und d gleich seyn?

Kdr. Ja, es sind rechte W. und also sind sie gleich.

Lhr. Ja, so scheint es, wenn wir sie ansehen, wir müssen es aber beweisen; — das wollen wir nun versuchen. Wie viel beträgt die Summe aller W. eines Dr.? — Kdr. 2 r. W.

Lhr. Nun ist also die Summe der W. des Dr. **ABD** = der Summe der W. des Dr. **ACD**; W. a = b, W. m = n.

Ziehe ich also von dem W. des ersten Dr. a + m ab, von den W. des andern Dr. b + n, so habe ich Gleiches von Gleichem abgezogen. — Was bleibt mir dann übrig?

Kdr. Gleiches.

Lhr. Was für W. bleiben uns übrig? — Kdr. c und d.

Lhr. Also sind c und d gleich. Was müssen N. W., die sich gleich sind, seyn?

Kdr. N. W., die sich gleich sind, sind r. W.

Lhr. Richtig! also steht L. AD auf CB rwkl., und wir haben 3 mal 2 gleiche W.

Jetzt könnt ihr auch die W. berechnen; wie groß ist Winkel a? — Kdr. $\frac{1}{3}$ rechter W.

Lhr. W. m? — Kdr. $\frac{2}{3}$ r. W.

Lhr. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ r. W., es bleibt also für c übrig?

Kdr. 1 r. W.

33ste Aufg. In einem gleichwinklichen Dr. soll eine L. gezogen werden, welche den einen W. in zwei ungleiche Theile theilt; was findet sodann Statt, in Absicht auf Gleichheit und Ungleichheit der W.?

Antw. Es entstehen 2 gleiche und 4 ungleiche W.

Der Lehrer führe diese Antwort auf folgende Art herbei (indem er Fig. 26 an die Tafel zeichnet).

Lhr. Ist hier W. a=b?

Kdr. Nein! — a ist ungleich b.

Lhr. Aber ist m ungleich n? — Kdr. m=n.

Lhr. Wird nun a+m gleich oder ungleich seyn b+n?

Kdr. Ungleich. — Denn Ungleiches (a und b) zu Gleichem (m und n) hinzugethan, giebt Ungleiches.

Lhr. Richtig! Sind die Summen der W. der beiden Dr. ABD und ACD gleich oder ungleich?

Kdr. Sie sind gleich.

Lhr. Wenn ich nun von der Summe der W. des Dr. ABD die beiden W. a und m, von der Summe der W. des Dr. ACD aber die beiden W. b und n abziehe; ziehe ich da Gleiches oder Ungleiches von Gleichem ab?

Kdr. Ich ziehe Ungleiches von Gleichem ab.

Lhr. Was muß also übrig bleiben?

Kdr. Ungleiches.

Lhr. Richtig! Kann hier nun wohl L. AD rechtwinklich auf BC stehen?

Kdr. Nein! denn c und d sind ungleich — nun sind sie N. W., also können sie nicht r. W. seyn.

Lhr. Könnte nun wohl c oder d einem der andern W. gleich seyn?

Kdr. Nein, denn W. d ist A. W. des Dr. ABD, also = m + a, also größer als m, größer als n (= m), größer als a und größer als b (da b kl. ist als m). Eben so ist W. c A. W. des Dr. ACD, also gleich b + n u. s. w.

34ste Aufg. Man soll in einem Dr., das 2 gleiche W. hat, aus dem ungleichen W. nach der gegenüberstehenden S. eine L. ziehen, die diesen W. in 2 gleiche Theile theilt, es frägt sich, was sodann Statt finden wird, in Hinsicht der Gleichheit der W.?

Antw. Es entstehen 3 Paar gleiche W., denn in dem Dr. ABC (s. Fig. 27) ist W. a = b nach der Annahme, c = d ebenfalls nach der Annahme (das Dr. sollte 2 gleiche W. haben): Gleiches von Gleichem abgezogen, bleibt Gleiches; also ist in den beiden Dr. ABD und ACD W. m = W. o. (Es folgt hieraus weiter, da o und m N. W. sind, daß sie r. W. sind, daß also die L. AD, welche den W. bei A theilt, auf BC rechtwinklich steht.)

Frage. Was würde Statt finden, wenn der ungleiche W. bei A in 2 ungleiche Theile getheilt würde?

(Die Auflösung ist dieselbe, wie bei der zunächst vorhergehenden Aufgabe.)

XV. Stufe. Gleichheit und Ungleichheit der W., die dadurch entstehen, daß man zwei W. eines Dr. jeden durch eine L. theilt.

35ste Aufg. ABC (s. Fig. 28) sey ein gleichseitiges Dr.; der eine W. desselben, bei A, sey durch eine L. AD in 2 gleiche Theile getheilt. Ein anderer W., bei B, sey durch L. BE in 2 ungleiche Theile getheilt, es frägt sich, wie viele gleiche und ungleiche W. sodann Statt finden werden?

(Sollten die Kinder diese Frage nicht zu beantworten wissen, so gehe der Lehrer die W., die er mit Buchstaben bezeichnet, und an den Figuren, die sie auf ihren Tafeln haben, mit den nemlichen Buchstaben bezeichnen läßt, einzeln durch — es ist

dies zugleich eine sehr nützliche Wiederholung früher gefundener Wahrheiten.)

Lhr. Ist W. a irgend einem andern W. gleich?

Kdr. W. a = W. b, aus der Annahme, daß der ganze W. bei A gleich getheilt seyn soll.

Lhr. Untersucht jetzt einmal, ob er noch irgend einem andern W. gleich seyn kann?

Kdr. Nein! keinem.

Lhr. Warum nicht dem W. k oder l?

Kdr. Der W. bei A ist gleich getheilt; der W. bei B ist ungleich getheilt; der W. bei A = dem W. bei B; — nun sind aber die ungleichen Theile und die gleichen Theile einer und der nemlichen Größe ungleich, also kann W. a, als gleicher Theil, nicht gleich seyn W. k oder l, als ungleichen Theilen des nemlichen W.

Lhr. Jetzt fragt es sich:

Ob W. b wohl = seyn kann dem W. e?

(Die Kinder werden dies vielleicht nicht zu beantworten wissen; dann fahre der Lehrer fort:)

Wie groß ist W. b? — Kdr. W. b ist $\frac{1}{3}$ r. W.

Lhr. Richtig! Ich kann nun L. BE so ziehen, daß W. e kl. oder gr. wird, und eben so W. f. — W. f kann nun nie die Größe von $\frac{4}{3}$ r. W. erreichen; warum wohl?

Kdr. Er ist Außenw. des Dr. BCE, ist also = W. i + W. l; W. i = $\frac{2}{3}$ r. W., W. l immer kl. als $\frac{2}{3}$ r. W. — folglich W. f immer kl. als $\frac{4}{3}$ r. W.

Lhr. Richtig! Nun ist $\frac{1}{3}$ + weniger als $\frac{4}{3}$ zusammen = weniger als $\frac{5}{3}$, es bleibt also für e mehr, als $\frac{1}{3}$ übrig, folglich muß er immer gr. als W. b seyn.

Daß er keinem der übrigen W. gleich seyn kann, ist leicht zu beweisen.

Es frägt sich ferner:

Kann W. e = seyn W. i?

(Sollten die Kinder das nicht finden, so fahre der Lehrer fort:)

Ist er nicht A. W. des Dr. ABF? — Kdr. Ja!

Lhr. Welchen 2 W. des Dr. ABF ist er also gleich?

Kdr. a + k.

Lhr. Nun ist a = $\frac{1}{3}$ r. W., k ist entweder mehr oder weniger als $\frac{1}{3}$ r. W.; warum wohl?

Kdr. Wäre er $\frac{1}{3}$ r. W., so wäre l auch $\frac{1}{3}$, mithin wäre der ganze W. bei B gleich getheilt, und das kann nicht seyn, nach der Annahme, daß der W. bei B ungleich getheilt seyn soll.

Lhr. Also W. e = a + k, die zusammen mehr oder weniger als $\frac{2}{3}$ r. W. betragen, mithin ungleich Winkel i, der $\frac{2}{3}$ ist. Kann nun aber wohl e = f seyn?

Kdr. Ja, denn e kann kl. seyn als f, er kann auch gr. werden als f, je nachdem die L. BE gezogen ist; mithin kann auch e = f seyn.

Lhr. Wenn e = f, welchem W. ist dann h gleich?

Kdr. Dann ist W. h = W. n und W. g. Denn h, g und n sind dann N. W. dreier gleichen W.

Lhr. Seht also jetzt zu, wie viele gleiche und ungleiche W. wir haben, vorausgesetzt, daß e = f ist.

Kdr. Dann ist a = b.

Ferner sind gleich: e, f, m (m als Sch. W. von e), h und n und g. c = d (nach der vohergehenden 32sten Aufgabe). Ungleich unter sich und allen übrigen W. sind: i, k, l.

Man kann, wenn Zeit dazu ist, und man es in Hinsicht der damit verbundenen Entwickelung und Uebung des Scharfsinns für nothwendig hält, hier noch mehrere ähnliche Aufgaben geben, z. B. 2 Linien ziehen, die beide W. in ungleiche Theile theilen u. s. w.; allein man wird wohl beim Privat-Unterricht, aber nicht leicht in einer öffentlichen Schule die dazu erforderliche Zeit haben.

XVI. Stufe. Bestimmung des Maaßes der Summe der W. eines Vierecks, Fünfecks u. s. w. mit lauter inneren W.

36ste Aufg. Wie viele r. W. betragen die 4 W. eines Vierecks? (es sey Qu., Pgr. oder Tr.)

Antw. Die Summe der W. eines Vierecks ist immer = 4 r. W.

Auflös. Ich ziehe in irgend einem Viereck, z. B. Fi-

gur 16, Tafel IV die Eck-L. (Diagonale) AC; wißt ihr nun zu antworten?

Kdr. Ja! Dadurch entstehen 2 Dr., die W. eines jeden Dr. = 2 r. W., also die W. dieser beiden Dr. = 2 × 2 = 4 r. W.

Lhr. Richtig! Wenn in einem Vierecke nun alle W. gleich groß sind, wie groß ist dann einer?

Kdr. Einer ist dann der vierte Theil von allen, alle aber sind so groß, als 4 r. Winkel, also einer der vierte Theil von vier r. W., folglich ein r. W.

Lhr. Gut. Wenn ich aber ein Viereck habe, worin immer 2 und 2 W. einander gleich sind, das eine Paar ist aber noch einmal so groß als das andere, wie groß ist dann jeder W.? (Er zeichnet Fig. 12, Taf. XII an die Tafel.)

Kdr. a ist noch einmal so groß als b, und c noch einmal so groß als d, alle W. sind also zusammen 6 mal so groß als b, folglich b der 6te Theil von allen Winkeln, alle W. sind so groß als 4 r. W., folglich b der 6te Theil von 4 r. W.; der sechste Theil von einem r. W. ist $\frac{1}{6}$, der 6te Theil von 4 r. W. 4 mal so viel, also $\frac{4}{6}$ eines r. W. oder $\frac{2}{3}$, folglich auch d = $\frac{2}{3}$, a oder c aber $\frac{4}{3}$ eines r. W.

Lhr. (zeichnet Fig. 13 an die Tafel.) Wenn b noch einmal so groß ist als d, a 3 mal und c 4 mal so groß ist als d, wie groß ist dann jeder Winkel, im Verhältniß zum r. W.?

Kdr. Dann ist d der 10te Theil von allen Winkeln, d. h. von 4 r. W.; der 10te Theil von 4 r. W. aber ist $\frac{4}{10}$ von einem r. W. oder $\frac{2}{5}$, daher b = $\frac{4}{5}$, a = $\frac{6}{5}$ und c = $\frac{8}{5}$ von einem r. W.

Lhr. Richtig! Wenn das Viereck aber so beschaffen wäre, daß b 2 mal so groß als d, a 2 mal so groß als b und c 2 mal so groß als a wäre, wie groß würde jeder W. seyn?

Kdr. Dann hätte b 2 solcher Theile wie d einen, a hätte 4 und c 8, also zusammen 15 Theile, und d wäre der 15te Theil von allen, also von 4 r. W.; daher d = $\frac{4}{15}$, b = $\frac{8}{15}$, a = $\frac{16}{15}$ und c = $\frac{32}{15}$ eines r. W.

Lhr. Richtig gerechnet. Aber doch kann es kein Viereck mit lauter innern W. geben, wo die W. eine solche Größe hätten. Warum? — Ueberlegt einmal, wie groß die berechneten W. sind?

Kdr. Es ist einer darunter, der größer ist als 2 r. W., der, welcher $\frac{32}{15}$ hat.

Lhr. Richtig; daher hat er aufgehört, ein Winkel zu seyn, und ist eine Ecke geworden. Die Aufgabe ist daher nur bei einem Viereck mit einem äußern W. möglich, wie bei Fig. 14.

37ste Aufg. Man soll das Maaß der Summe aller W. eines F. E. bestimmen.

Lhr. Wie viel r. W. wird die Summe aller W. eines F. E. betragen?

Kdr. 6 r. W. — Zieht man nemlich 2 Eck-L. (s. Figur 17, Taf. IV), so zerfällt das F. E. in 3 Dr. Die W. jedes Dr. betragen 2 r. W.; die Summe aller W. folglich $3 \times 2 = 6$ r. W.

Lhr. Richtig! Wie groß wird ein Winkel seyn, wenn im Fünfeck alle Winkel gleich groß sind?

Kdr. Einer ist dann der fünfte Theil von allen, muß also auch den 5ten Theil von dem, was alle haben, betragen, daher den 5ten Theil von 6 rechten W., daher $\frac{6}{5}$ eines r. W.

Lhr. In wie viele Dr. läßt sich das Sechseck zerlegen?

Kdr. In 4 Dr.

Lhr. Daher alle W. zusammen genommen?

Kdr. 8 r. W.

Lhr. Ein einzelner Winkel, wenn alle gleich sind?

Kdr. Den 6ten Theil von 8 r. W., also $\frac{8}{6}$ oder $\frac{4}{3}$ eines rechten Winkels.

Lhr. Richtig! Man nennt das den Vieleckswinkel suchen. Könnt ihr mir sagen, in wie viele Dr. sich ein Siebeneck zerlegen läßt? — Kdr. In 5.

Lhr. Ein Achteck? — Kdr. In 6.

Lhr. Also immer in 2 weniger als das Vieleck Ecken hat. Wie viel wird nun wohl die Summe aller W. eines Zwölfecks betragen?

Kdr. Die Fig. hat 12 Ecken; $12 - 2 = 10$; also läßt sie sich in 10 Dr. zerlegen, folglich betragen alle W. 10×2 r. W. $= 20$ r. W.

Lhr. Und die Vieleckswinkel?

Kdr. Den 12ten Theil davon, oder $\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ eines r. W.

XVII. Stufe. Bestimmung des Maaßes der äußern und innern W. bei Figuren mit äußern W.

38ste Aufg. Es ist die Frage: wie viel die Summe des Maaßes aller innern W. eines Tr. mit einem äußern W. wenigstens und höchstens betragen könne?

(Die Kinder werden diese Frage vielleicht nicht zu beantworten wissen. — Dann zeichne der Lehrer Fig. 18 (Taf. IV) an die Tafel, und sage ihnen:)

Wir wollen annehmen, hier sey die Summe der W. so klein als möglich, doch beträgt sie immer mehr als nichts. (auf Fig. 19 zeigend.)

Wir wollen annehmen, sie sey hier so groß als möglich, so ist sie doch immer um W. a und b kleiner als 2 r. W., also folgt: Das Maaß der W. eines Tr. mit einem äußern W. beträgt wenigstens etwas mehr als nichts — höchstens etwas weniger als 2 r. W.

39ste Aufg. Es ist die Frage: wie sich bei einem Tr. mit einem äußern W. das Maaß dieses W. zu dem Maaße der innern W. verhalte?

Antw. Das Maaß der äußern W. ist gleich der Summe des Maaßes der drei innern W.

(Für diese Aufgabe giebt es mehrere Auflösungen; sollten die Kinder nicht von selbst darauf kommen, so leite sie der Lehrer auf folgende Art auf die verschiedenen Auflösungen (auf Fig. 20 zeigend): jedoch ohne die H.L. AE.)

ABCD sey das Tr.; ich ziehe eine H.L. AE durch den Sch.P. des äußern W. nach dem Sch.P. des gegenüberstehenden innern W. A, und bezeichne die W., die jetzt vorhanden sind, mit Buchstaben m, n, c, p, a, b, — werdet ihr nun den Beweis selbst finden können?

(Gewiß werden sie ihn nun finden.)

1ster Beweis.

Winkel m = c + p, n = a + b, folglich m + n oder der ganze äußere W. = c + p + a + b oder gleich den drei innern W.

2ter Beweis. (s. Fig. 21.)

Ich verlängere die S. BD bis E, so ist W. b, als A. W.

des Dr. BAE, = W. m + d; ferner ist W. a, als A. W. des Dr. DEC, gleich W. b + c, und da b = d + m, so ist W. a = c + d + m, oder der äußere W. a = den 3 innern W. c, d, m.

3ter Beweis.

ABCD sey das Tr. (s. Fig. 22.)

Ich ziehe H. L. BC, so sind die beiden W. a und b jeder sich selbst gleich; nun habe ich hier 2 Dr. BCD und ABC; das Maaß ihrer W. beträgt bei jedem von beiden 2 r. W., ziehe ich nun bei jedem von der Summe ihrer W. die W. a und b ab, so bleibt mir, da ich Gleiches von Gleichem abgezogen habe, Gleiches übrig.

Bei Dr. ABC bleibt mir W. c übrig; bei Dr. BCD bleiben mir übrig die W. m, n, o, also: W. c = m + n + o.

4ter Beweis. (s. Fig. 20.)

Nehme ich m, n und ihre N. W., so betragen sie zusammen 4 r. W. — Nehme ich eben diese N. W. und setze hinzu c, p, a, b, so habe ich auch 4 r. W., weil es die Winkel aus zweien Dr. sind. Ich habe also gleichviel zu diesen N. W. hinzugesetzt, als ich m, n, oder c, p, a, b nahm. Folglich ist der äußere W. gleich den innern.

40ste Aufg. Man soll angeben: wie viel das Maaß der innern W. eines F. E., das einen äußern W. hat, betrage?

Antw. Das Maaß ꝛc. beträgt wenigstens mehr als 2 r. W., höchstens weniger als 4 r. W.

Beweis. Angenommen, der äußere W. sey so groß als möglich (s. das F. E. ABCDE Fig. 23), und diese Figur sey das Fünfeck, so ziehe ich von A nach B H. L. AB und bekomme dadurch Tr. ABCD. — Das Maaß der W. dieses Tr. ist = 4 r. W., allein von dieser Summe des Maaßes der W. gehen bei dem F. E. ABCDE W. a und b ab; diese können noch so klein seyn, so betragen sie immer mehr als nichts; folglich beträgt die Summe aller W. des F. E. weniger als 4 r. W.

Angenommen, der äußere Winkel sey so klein als möglich (s. Fig. 24), so ziehe ich abermals H. L. AB, dann können in dem Dr. ABE die W. a und b so groß seyn als möglich, so ist die Summe beider doch immer (um den W. c) kl. als 2 r. W. Ziehe ich also ihren Betrag von 4 r. W. ab, so bleiben immer mehr, als 2 r. W. übrig.

41ste Aufg. Wie verhält sich das Maaß des äußeren Winkels bei einem Fünfeck zu dem inneren Winkel?

Antw. Die inneren Winkel sind um 2 r. W. größer als der äußere.

Auflös. Wenn ich die beiden W. a und b nehme, und setze die inneren W. hinzu, so erhalte ich vier r. W.; setze ich aber zu a und b den äußern W. c, so erhalte ich nur 2 r. W. — Ich habe im ersten Falle also 2 r. W. mehr hinzugesetzt, als im andern Falle.

Anmerk. Es giebt für diesen Fall noch mehr Auflösungen, und wenn man auf diese Weise noch das Sechseck, Siebeneck, Achteck ic. behandelt, so wird man leicht bemerken, daß mit jeder Ecke, die hinzukommt, auch jederzeit alles vorher gefundene um 2 r. W. wächst; z. B.

Im Viereck ist das, was die innern W. mehr betragen als der äußere . . . . . = 0 (Null) r. W.
Im Fünfeck . . . . . = 2 r. W.
Im Sechseck . . . . . = 4 r. W.
Im Siebeneck . . . . . = 6 r. W.

Im Viereck betragen die innern Winkel wenigstens etwas mehr als 0, höchstens beinahe 2 r. W.

Im Fünfeck wenigstens etwas mehr als 2 r. W., höchstens beinahe 4 r. W.

Im Sechseck wenigstens etwas mehr als 4 r. W., höchstens beinahe 6 r. W.

Den Grund wird man leicht finden, wenn man Taf. XII, Fig. 15 aufmerksam betrachtet. Indem ich ein Viereck mit einem äußern W. abschneide (was jedesmal geschehen kann, wenn ein äußerer W. da ist), habe ich von den inneren Winkeln so viel weggenommen, als der äußere beträgt; es bleiben demnach noch so viel Dreiecke übrig, als noch Ecken frei sind (in diesem Falle 2); wäre die Figur ein Siebeneck, so würden 3 Dr. übrig bleiben, die inneren W. würden dann also 6 r. mehr betragen als der äußere W.

Ferner kommen zu dem, was das Viereck wenigstens oder höchstens betragen kann, mit jedem Dreiecke, d. h. mit jeder Ecke, 2 r. W. hinzu.

Man hat daher in allen diesen Figuren, außer dem

Viereck, noch eben so viel Dreiecke, als die Figur Ecken hat, weniger 4.

42ste Aufg. Wie groß sind die inneren Winkel in einem Fünfeck mit 2 äußeren Winkeln?

Antw. Kleinstens etwas mehr als nichts, und größtens beinahe 2 r. W.

Auflös. Ist der beim Viereck mit einem äußeren Winkel sehr ähnlich.

43ste Aufg. Wie verhalten sich die äußeren zu den inneren Winkeln?

Antw. Die äußeren sind um 2 r. W. mehr, als die inneren W.

Auflös. Man ziehe in Fig. 16, Taf. XII die punkt. Linie, so entstehen 2 Dr. mit äußeren W., worin die äußeren W. so groß sind, als die inneren. Folglich sind die beiden äußeren Winkel so groß, wie die drei inneren W. der Fig., wenn ich noch a und b zu ihnen hinzusetze; daher sind die innern W. allein um 2 r. W. kleiner als die äußeren W.

44ste Aufg. Wie groß sind die inneren W. eines Sechsecks mit 2 å. W.?

Antw. Kleinstens etwas mehr als nichts, größtens beinahe 4 r. W.

Auflös. Es besteht aus 2 Vierecken, jedes mit einem å. W., muß daher auch so viel betragen, wie 2 Vierecke mit einem äußeren W.

Es frägt sich noch: Wie verhalten sich die äußeren Winkel zu den inneren?

Antw. Sie sind ihnen gleich.

Von hier an wächst wieder Alles mit jeder Ecke um 2 r. W., was man leicht sehen kann, wenn man an das Sechseck noch eine Ecke, d. h. ein Dr., ansetzt. Man hat daher in allen Vielecken mit 2 äußeren W., wenn man die beiden Vierecke abgeschnitten, noch eben so viel Dr. als die Figur Ecken hat, weniger 6.

Auf eine ähnliche Weise wird man finden, daß bei den Figuren mit 3 äußeren Winkeln die Dreiecke jedesmal übrig bleiben, wenn man 3 Vierecke mit å. W. abgeschnitten, d. h. so viel als Ecken sind weniger 8. Etwas mehr als das, was

diese Dr. betragen, giebt jedesmal das Kleinste, und so viel hinzugerechnet, als die Vierecke höchstens betragen können (jedes beinahe 2 r. W.), giebt das Höchste.

Bei fortgesetzter Durchführung entsteht sodann für den Lehrer folgende Regel: Bei allen Vielecken, ohne Ausnahme, findet man den Ueberschuß der inneren Winkel über die äußeren, wenn man die Zahl der äußeren W. doppelt nimmt, dann 2 hinzurechnet, dies von der Zahl der Ecken abzieht, und das Uebrigbleibende abermals doppelt nimmt. Ist das Wegzunehmende größer, als die Zahl, von der es weggenommen werden soll, so ziehe man das Kleinere von dem Größern ab, und nehme es doppelt; in diesem Falle erhält man, wie viel die äußeren W. mehr sind als die inneren. Bleibt Nichts, so sind die äußeren W. den inneren gleich, z. B.

45ste Aufg. Wie viel betragen die inneren W. eines Eilfecks mehr als die äußern?

Auflös. $2\times3=6$, $+2=8$; $11-8=3$; $3\times2=6$ r. W. mehr. (s. Fig. 18.)

46ste Aufg. Im Zehneck mit fünf å. W.

Auflös. $2\times5=10$, $10+2=12$; $10-12=-2$; $-2\times2=-4$ r. W. Also betragen die äußern 4 r. W. mehr als die innern W.

47ste Aufg. Im Zehneck mit 4 å. W.

Auflös. $2\times4=8$, $8+2=10$; $10-10=0$; $0\times2=0$ die äußern sind gleich den innern W. (s. Fig. 20.)

Das Kleinste ist jedesmal etwas mehr als das, was so heraus gerechnet worden (in dem Falle, wo die äußern mehr sind als die innern, jedesmal etwas mehr als nichts), das Größte findet man, wenn man die å. W. um 2 vermehrt, von den Ecken abzieht und dann doppelt nimmt; doch erreichen die W. diese Größe nie ganz. Z. B. bei Fig. 18 $3+2=5$; $11-5=6$; $6\times2=12$; daher beinahe 12 rechte W.

Ferner: in Fig. 19.

$5+2=7$; $10-7=3$; $3\times2=6$; daher beinahe 6 r. W.

In Fig. 20; $4+2=6$; $10-6=4$; $4\times2=8$; beinahe 8 r. W. — Der Raum erlaubt es nicht, das hier Angegebene weitläuftiger auszuführen. Ein aufmerksamer, denkender Lehrer wird aber doch hoffentlich dadurch in den Stand gesetzt

werden, sich zu Recht zu finden, und das hier nur kurz Angedeutete selbst weiter auszuführen.

XVIII. Stufe. Vergleichung zweier Dreiecke in Absicht auf Gleichheit und Ungleichheit derselben.

Lhr. Die Größe eines W. wird durch die Oeffnung seiner Sch. bestimmt (auf Fig. 29, Taf. V zeigend). Welcher W. wird der größte seyn, W. a oder W. b?

Kdr. W. a, weil sich die Sch. des W. a weiter öffnen, als die des W. b.

Lhr. (auf Fig. 30 zeigend.) Welcher von diesen beiden W. hier wird der gr. seyn?

Kdr. W. a ist der gr.

Lhr. Aber die Oeffnungen beider W. sind ja gleich, und diese bestimmen die Gr. des W.?

Kdr. Ja, aber bei gleicher Entfernung vom Sch. P. des W., und diese Entfernung ist hier ungleich.

Wäre z. B. (er zeichnet Fig. 36 und 37 an die Tafel) die Linie AB = ab, ferner AC = ac, und ich wüßte nun noch, daß BC = bc wäre, könnte dann wohl der Winkel m verschieden von n seyn?

Kdr. Nein! Denn die Oeffnungen beider W. vom Scheitelpunkte, nemlich BC und bc, sind ja in gleicher Entfernung vom Scheitelpunkte einander gleich.

Lhr. Richtig! Und wenn wir das eine Dreieck so auf das andere legten, daß der Punkt a auf A und b auf B käme, so würde auch die Linie ac mit der L. AC in eine zusammenfallen, daher also auch die beiden Schenkel ab und ac dieselbe Oeffnung haben wie AB und AC. Ob aber auch in diesen beiden Dreiecken der W. r gleich seyn mag dem W. p?

Kdr. Ja, das läßt sich ja eben so beweisen, wie beim vorigen W., denn nun giebt die Linie ab und AB die Oeffnung der Schenkel an u. s. w.

Lhr. Wird der W. q so groß seyn, als W. o?

Kdr. Ja! Denn die ersten beiden W. betragen in dem einen Dr. eben so viel als in dem andern; alle 3 betragen in

dem einen auch so viel als in dem andern, nemlich 2 r. W. Nimmt man nun in dem einen die beiden ersten W. weg, und in dem andern auch, so muß gleichviel für den 3ten W. übrig bleiben.

Lhr. Wenn also in 2 Dr. die S. in dem einen sind, wie die in dem andern, was folgt daraus für die W.?

Kdr. Daß auch die W. in dem einen Dr. sind, wie die W. in dem andern.

Lhr. Zwei Dr. sind also gleich, wenn wir auch nur wissen, daß die drei S. des einen sind, wie die des andern, jede für sich genommen. Gesetzt nun, wir wüßten von den beiden Dr. (Fig. 36 und 37), daß S. AB = ab, S. AC = ac, und daß außerdem noch W. m = W. n wäre, könnten wir daraus schon behaupten, daß die beiden Dr. gleich wären?

(Die Kinder werden vielleicht nicht gleich zu antworten wissen.)

Lhr. Wann sind die beiden W. m und n gleich?

Kdr. Wenn ihre Oeffnungen in gleicher Entfernung vom Scheitelpunkte gleich sind.

Lhr. Nun ist in dem ersten Dr. die Entfernung vom Scheitelpunkte AB und AC gleich der im zweiten Dr. ab und ac; welches ist das Maaß der hierzu gehörigen Oeffnungen?

Kdr. Die Linien BC und bc.

Lhr. Wenn nun die W. m und n gleich sind?

Kdr. Dann müssen auch die Oeffnungen BC und bc gleich seyn, dann haben wir aber zwei Dr., worin alle drei S. in dem einen sind, wie in dem andern, und da ist schon bewiesen, daß die Dr. dann gleich sind, also auch W. o = q und W. r = p.

Lhr. Wenn also in zweien Dr. zwei S. in dem einen sind, wie zwei in dem andern, und der von beiden S. eingeschlossene W. in beiden Dr. gleich ist, so sind die Dr. ebenfalls gleich.

Sind zwei Dr. aber auch wohl gleich, wenn zwei S. in dem einen sind, wie zwei in dem andern, und außerdem ein W. in dem einen, wie einer in dem andern, der aber nicht der von den beiden gegebenen S. eingeschlossene ist?

(Die Kinder werden dies wahrscheinlich bejahen und be-

weisen wollen, wie vorher; der Lhr. mache sie sodann aber darauf aufmerksam, daß es auch einen Fall geben kann, wo die beiden Dr. nicht gleich sind. Er zeichne zu dem Ende Fig 26 (Taf. IV), worin AB = AC, AD = AD, W. m = n, die beiden Dr. aber dennoch nicht gleich sind.)

48ste Aufg. Es frägt sich: Ob 2 Dr. sodann einander gleich seyn müssen, wenn die 3 W. des einen = sind den drei W. des andern?

Antw. Wenn die 3 W. ꝛc. so können die Dr. gleich oder ungleich seyn.

Lhr. (indem er Fig. 38 an die Tafel zeichnet.)

DE und BC sind gll., also ist W. b = m, r = n, p sich selbst gleich, mithin alle 3 W. des Dr. ADE = allen 3 W. des Dr. ABC; wie wird es jetzt mit den S. stehen?

Kdr. Die S. sind ungleich, denn S. AD ist um DB kürzer als AB; S. AE ist um EC kürzer als AC, und DE ist kürzer als BC.

Lhr. Was für eine Bedingung müßte also noch hinzukommen, wenn beide Dr. bei gleichen W. einander gleich seyn sollten?

Kdr. Es müßte auch eine S. des einen Dr. = seyn einer S. des andern Dr.

Lhr. Das wollen wir gleich untersuchen (indem er S. BC mit dem Zirkel oder Maaßstabe mißt, und sodann S. AE, die beide von gleicher Größe gezeichnet worden sind). Ihr seht also, daß S. BC in dem Dr. ABC = ist S. AE in dem Dr. ADE, und doch sind die Dr. ungleich.

Kdr. Die eine S. des einen Dr. muß der ähnlich liegenden S. des andern Dr. gleich seyn. Z. B. die kleinste S. des einen Dr. = der kleinsten S. des andern Dr.

Lhr. Ja, dann ist es richtig, dann wäre z. B. S. BC bei dem einen Dr. kl., wäre sie allenfalls nur so groß als S. DE, so würden dann auch S. AB und AC kürzer seyn. —

Wäre die S. BC größer als sie ist, so müßten die beiden S. AB und AC länger seyn; nur in dem Falle, wenn S. BC sich selbst gleich ist, sind auch S. AB und AC von der nemlichen Größe.

Also folgt hieraus:

Sind in 2 Dr. alle W. und eine S. des einen Dr. = allen W. und der ähnlich liegenden S. des andern Dr., so sind die ganzen Dr. einander gleich.

Sind die ähnlich liegenden S. ungleich, so sind die Dr. ungleich aber ähnlich, weil die S. dann eine gleiche Lage haben.

49ste Aufg. Wenn bei 2 Dr. eine S. und die beiden an dieser S. liegenden W. des einen Dr. = sind einer S. und den beiden an derselben liegenden W. des andern Dr., sind sodann die Dr. einander gleich?

Antw. (Wenn ꝛc., so sind die Dr. einander gleich.)

Lhr. Wir wollen jetzt versuchen, diese Frage zu beantworten; sagt mir, wird in dem gegebenen Falle wohl auch der 3te W. des einen Dr. = seyn müssen dem 3ten W. des andern Dr.? — Kdr. Ja!

Lhr. Warum?

Kdr. Die beiden W. des einen Dr. sind = zweien W. des andern Dr. Alle W. eines Dr. betragen zusammen 2 r. W.; ziehe ich die Summe der beiden W. in jedem der beiden Dr. ab, von der Summe aller 3 W., so habe ich Gleiches von Gleichem abgezogen, und es bleibt mir Gleiches übrig, folglich sind die beiden andern W. einander gleich.

Lhr. Also wären alle 3 W. einander gleich — was ist ferner gleich? — Kdr. Eine Seite.

Lhr. Also haben wir wieder denselben Fall, wie bei der 43sten Aufg., daß nemlich alle 3 W. und eine ähnlich liegende S. in beiden Dr. gleich sind; was folgt daraus?

Kdr. Daß die ganzen Dr. einander gleich sind.

Lhr. Es läßt sich das auch noch auf eine andere Art beweisen. Seht hier dies Dr. Fig. 39.

BC sey die S., die beiden Dr. gemein ist. — W. m und o seyen die beiden an der S. liegenden W., die in beiden Dr. auch gleich sind; die S. CA und BA müssen auch in dem andern Dr. die nemliche Richtung haben — denn hätten sie eine andere, so wären die W. m und o entweder gr. oder kl., sie sollen aber gleich seyn; da sie nun die nemliche Richtung haben, so müssen sie auch unter dem nemlichen P. zusammen kommen, also unter A; denn kämen sie unter einem andern P.

zusammen, z. B. unter D, so wäre der W. bei C um den W. p kleiner, als der ganze W. bei C; er soll ihm aber gleich seyn, d. h. er soll = seyn W. o+p. Kämen sie unter E zusammen, so wäre der W. bei C um den W. r gr., also wieder ungleich dem ganzen W. bei C; mithin müssen sie bei A zusammen kommen.

Es folgt hieraus allgemein:

„Sind bei 2 Dr. die eine S. des einen Dr. mit den beiden an dieser S. liegenden W. der einen S. des andern, mit den beiden an dieser nemlichen S. liegenden W. einander gleich, so sind alle übrigen S. und W. und also die ganzen Dr. einander gleich."

50ste Aufg. Was wird aber dann der Fall seyn, wenn in 2 Dr. in jedem ein W., und die dem W. gegenüberstehende S. gleich sind; werden sodann die ganzen Dr. gleich seyn?

Kdr. Nein, sie müssen nicht gleich seyn.

Lhr. Wie könnt ihr mir das beweisen? Wer es sich getraut, der trete hier an die Tafel!

Ein Kd. (indem es an die Tafel tritt und Fig. 41 zeichnet.) ABC sey das Dr., W. a der W., S. BC die S., die in beiden Dr. gleich seyn sollen.

Ich ziehe aus irgend einem P. der L. AC, z. B. aus E, eine L. DE = BC, und verlängere die S. AB bis D, so ist Dr. ADE ein neues Dr., in welchem W. a gleich ist dem W. a in dem gegebenen Dr. ABC, die gegenüberstehende S. DE = BC, wo aber W. b gr. oder kl. oder eben so groß seyn kann, als W. o, je nachdem ich die L. ED beschreibe; daher können die beiden andern S. und W. ungleich seyn oder gleich.

Lhr. Ganz recht! — Du hast bewiesen, was zu beweisen war; es muß also noch eine kleine Bedingung hinzukommen; wenn ich z. B. sagte:

Wenn in zwei glsch. Dr. in jedem ein W. und die dem W. gegenüberstehende S. gleich sind, so sind die ganzen Dr. einander gleich.

Wird das wahr seyn? — Kdr. Ja!

Lhr. Wie wollt ihr mir das beweisen?

Kdr. Das Dr. soll ein glsch. seyn; es muß also auch zwei gleiche W. haben. Ist der ungleiche W. gegeben, so ist

auch die Größe der beiden gleichen W. gegeben, also sind alle 3 W. bestimmt. Ist einer von den gleichen W. gegeben, so ist der 2te W. diesem gleich, und der 3te W. ist also auch bestimmt; also sind alle 3 W. bestimmt; nun ist auch eine einem bestimmten W. gegenüberstehende S. gegeben, und wir haben vorhin bewiesen:

daß, wenn in 2 Dr. alle W. und eine ähnlich liegende S. gleich sind, so sind die ganzen Dr. gleich;

folglich sind auch hier die beiden Dr. gleich.

Lhr. Richtig! Wir wollen die gefundene Wahrheit wiederholen:

Wenn in 2 gleichsch. Dr. ein W. und die diesem W. gegenüberliegende S. gleich sind, so sind die beiden Dr. einander gleich.

(Die Fälle, in denen 2 Dr. ungl. sind, ergeben sich aus dem Vorhergehenden von selbst. Ist Zeit vorhanden, so kann man sie aufsuchen lassen.)

51ste Aufg. Es frägt sich: Was bei einem Dr., das 2 gl. und 1 ungl. S. hat, in Hinsicht der Gleichh. und Ungleichh. der W. Statt finde?

Antw. Wenn in einem Dr. 2 S. gl. und 1 ungl. sind, so sind auch 2 W. gl., der 3te W. ist ungl., und zwar ist derjenige der ungl., welcher der ungl. S. gegenüber steht, und umgekehrt:

Sind in einem Dr. 2 W. gl., so sind auch die beiden S., die ihnen gegenüberstehen, gl.

Man kann diesen Satz so beweisen: ABC Fig. 27 sey ein gleichsch. Dr., und zwar AB = AC, so theile ich den von den beiden gl. S. eingeschl. W. in 2 = Theile, so daß W. a = b. Nun habe ich 2 Dr. erhalten, nemlich BAD und CAD. In diesem Dr. ist AB = AC, AD in dem einen so groß als im anderen, und W. a = W. b. Dies ist nun der von den gleichen Seiten eingeschlossene W., daher ist Dr. BAD = Dr. CAD. In gleichen Dreiecken liegen den gleichen S. gegenüber gleich große Winkel, daher W. c = W. d.

Auch umgekehrt läßt sich der Satz leicht erweisen: Wenn in einem Dr. 2 gl. W. sind, so sind auch 2 = Seiten vorhanden. Wäre W. e = W. d gegeben, so theile man den

nicht bekannten W., wie vorher, in 2 = Theile; dann hat man in beiden Dreiecken 2 = W., a=b und c=d, außerdem aber die Seite AD in einem so groß als im andern; daher die beiden Dr. =. Nun müssen in gleichen Dreiecken gleichen Winkeln gegenüber gleiche Seiten liegen, daher S. AB = S. AC.

52ste Aufg. Wenn in einem Dreiecke alle drei Seiten gleich sind, was sind sodann die Winkel?

Antw. Wenn ꝛc. so sind auch die W. gleich.

Beweis. Fig. 31 sey das glf. Dr. Da AB = AC, so folgt aus dem vorigen, daß b = c; aber es ist auch AC = CB, daher b=a. Da nun b=a und auch = c ist, so sind die drei W. einander gleich.

53ste Aufg. Wenn in einem Dr. alle 3 S. ungleich sind, was sind dann die W.?

Antw. Wenn in einem Dr. alle 3 S. ungleich sind, so sind auch die W. ungleich.

Beweis. ABC Fig. 32 sey das ungleichs. Dr., und zwar soll AC die größte und BC die kleinste Seite seyn. Ich verlängere S. AB, bis sie AC gleich wird, d. h. bis D, und ziehe von D nach C eine L. DC, so entsteht ein neues Dr. ADC, das 2 gleiche S., AD und AC, hat; folglich ist nun W. d=m+c; W. b ist, als A. W. des Dr. BCD, welchen beiden W. gleich? — Kdr. W. b=d+m.

Lhr. Also, da d=m+c, so ist b=e+2 m (wenn ich nemlich anstatt d setze m+e). Ist er nun also gleich c?

Kdr. Nein! er ist um 2 m größer als c.

Lhr. Also ist W. b ungleich c. Jetzt verlängere ich L. BC nach E (s. Fig. 33), so daß BE = AB wird; dann ist also, weil AB und EB gleiche S. sind, W. r=a+o, W. c aber, als A. W. des Dr. CAE, = r+o, also W. c = W. a + 2 mal W. o, mithin ist W. c um was größer als W. a?

Kdr. Um 2 mal den W. o.

Lhr. Kann also W. c = W. a seyn?

Kdr. Nein, ungleich.

Lhr. Wir haben also nun gefunden, daß W. b gr. ist, als W. c; W. c gr. als W. a. Kann W. b=o seyn?

Kdr. Nein. — W. c ist gr. als a, b ist gr. als c, also auch gr. als a.

Stadt-Bibliothek Passau

Lhr. Es folgt hieraus allgemein: Sind in einem Dr. alle 3 S. ungleich, so sind auch die W. ungleich, und umgekehrt: Sind die W. ungleich, so sind es auch die Seiten.

Es giebt aber hier noch einen Umstand zu bemerken:

54ste Aufg. Welchem W. steht die größte S., welchem die mittlere, und welchem die kleinste S. gegenüber?

Welche S. ist wohl in dem Dr. **ABC** die größte?

Kdr. S. **AC** ist die größte.

Lhr. Welches ist der größte W.?

Kdr. W. b ist der größte W.

Lhr. Welchem W. steht also die größte S. gegenüber?

Kdr. Die größte S. steht dem größten W. gegenüber.

Lhr. Ist dies jedesmal so, oder nur in diesem Falle? —

Kdr. Es ist immer so. Denn wäre der W. b nicht der größte, so müßte er entweder eben so groß, oder kleiner seyn, als W. c. Wäre er eben so größ als c, so müßte **AB** = **AC** seyn; wäre er kleiner als **C**, so müßte ich von c etwas abschneiden, um ein gleichsch. Dr. zu erhalten. Dadurch würde **AB** kürzer werden, als es jetzt ist; es wäre aber dann = **AC**, weil beides gleiche Schenkel wären. Nun ist aber **AB** schon kleiner als **AC**; es kann also durch Abschneiden nicht = **AC** werden, weßhalb auch W. c nicht größer seyn kann als W. b.

Lhr. Sucht nun die andern S. auf und seht, welchem W. sie gegenüberstehen?

Die Kinder werden noch folgende 2 Wahrheiten finden: dem kleinsten W. steht die kleinste S. gegenüber; dem W. von mittlerer Größe steht die Seite von mittlerer Größe gegenüber, und umgekehrt:

Der größten S. steht der größte W. gegenüber; der kleinsten S. steht der kleinste W. gegenüber; der mittleren S. steht der mittlere W. gegenüber.

55ste Aufg. Können in einem Dr. 2 S. zusammengenommen eben so groß seyn, als die dritte? — Z. B. in Fig. 32 **AB** + **BC** = **AC**?

Antw. Nein, sie sind jederzeit größer.

Beweis. Wenn **AC** die größte S. ist, so ist **AB** kleiner. Ich verlängere diese nach **AD**, bis sie = **AC**; alsdann

ist W. d = W. m + c, weil es nun ein glsch. Dr. ist. Nun ist aber W. m kleiner als W. d, und dem kleinern W. gegenüber liegt auch die kleinere S. Daher ist BD kleiner als BC; AB + BD ist also auch nicht so groß als AB und BC; weil aber AB + BD = AC, so ist auch AC kleiner als AB + BC.

Oder:

Es sey ABC Fig. 72, Taf. XV das gegebene Dreieck. Ich verlängere die Seite AC so, daß AD = AB wird, und ziehe die L. BD. Jetzt ist DAB ein glsch. Dr., und darum W. ADB = W. ABD. Der W. CBD ist aber größer als W. ABD, folglich auch größer als W. ADB. — Dem größern W. liegt auch die größere S. gegenüber, daher ist DC, welche dem W. CBD gegenüber liegt, auch größer als BC, welche W. BDC gegenüber liegt. Nun ist aber DC so groß als AC und AB; folglich ist AC + AB größer als BC.

XIX. Stufe. Einfluß der Theilungs-Linie, die in einem Dr. aus dem Sch. P. eines W. nach der gegenüberstehenden S. gezogen wird, auf die Gleichheit oder Ungleichheit der S. der dadurch entstandenen Dreiecke.

Lhr. Wir wollen jetzt in verschiedenen Arten von Dr., aus dem Sch. P. eines W. derselben, nach den gegenüber stehenden Seiten L. ziehen, und sehen:

Ob diese S. dadurch in gleiche oder in ungleiche Theile getheilt werden, und zwar wollen wir das zuerst beim glf. versuchen, und den W.

1) in gleiche,
2) in ungleiche Theile theilen.

56ste Aufg. Man soll in einem gleichseitigen Dr. irgend einen W. durch eine L., die man aus seinem Sch. P. nach der gegenüber stehenden S. zieht, in 2 gleiche Theile theilen, und angeben:

Ob diese S. dadurch in 2 gleiche oder in 2 ungleiche Theile getheilt werde?

Antw. Die S. wird in 2 gleiche Theile getheilt.

(Wahrscheinlich finden die Kinder den Beweis; wo nicht, so kann sie der Lehrer auf folgende Art darauf leiten, indem er Fig. 42, Taf. V an die Tafel zeichnet.)

Wir haben hier 2 Dr., ABD und ACD; was wollen wir wissen?

Kdr. Ob S. BD = CD ist?

Lhr. Wenn die beiden Dr. gleich sind, werden dann auch diese beiden S. gleich seyn?

Kdr. Ja, denn sie stehen gleichen W. gegenüber.

Lhr. Wir haben also nur zu untersuchen:

Ob diese beiden Dr. gleich sind?

Sind alle 3 S. gleich?

Kdr. Das wissen wir noch nicht; wir wissen wohl, daß S. AC = S. AB ist, und S. AD sich selbst gleich; wir wissen aber nicht, ob CD = BD ist.

Lhr. Wir müssen also zuerst die W. untersuchen. Wer weiß mir, mit Hülfe der W., zu beweisen, daß beide Dr. gleich sind?

Ein Kd. W. d = c, b = a; S. AC = S. AB, also in beiden Dr. eine S. mit 2 an dieser S. liegenden W. =, also die ganzen Dr. gleich (nach der 49sten Aufgabe).

Ein anderes Kd. W. b + d = a + c; ziehe ich also a + d von 2 r. W. ab, und a + c auch von 2 r. W., so bleibt mir Gleiches übrig; folglich W. m = n; also alle W. beider Dr. =; nun ist S. AD sich selbst gleich, also in beiden Dr. alle W. und eine S. gleich, mithin die ganzen Dr. gleich (s. die 48ste Aufg.).

Lhr. Ist S. BC bei D gleich getheilt?

Kdr. Ja, denn BD = CD.

Lhr. Was für W. sind wohl W. m und n?

Kdr. R. W., denn beide W. sind gleich; beide W. sind N. W., und wenn N. W. gleich sind, so sind es r. W.

Lhr. Also wissen wir jetzt:

1) daß eine L., die in einem glf. Dr. aus dem Sch. P. eines der W. gezogen wird, so daß sie diesen W. in zwei gleiche Theile theilt, auch die gegenüberstehenden S. in 2 gleiche Theile theilt.
2) Daß diese Th. L. auf der S. rwkl. steht.

57ste Aufg. Man soll bei einem glsch. Dr. aus dem W., den die beiden gl. S. einschließen, nach der gegenüberst. S. eine L. ziehen, die diesen W. in 2 gl. Theile theilt, und angeben, ob auch diese S. gl. getheilt werden wird?

(Die Kinder werden finden, daß die S. gl. getheilt wird; der Beweis ist gleich dem bei der vorhergehenden Aufg.; vielleicht kommt auch ein Kind bei der vorigen oder bei dieser Aufg. auf den folgenden Beweis:)

Dr. **ABC** (s. Fig. 43) sey das glsch. Dr.; S. **AB** und **AC** seyen die gl. Sch., der W. bei **A** der W., den sie einschließen, W. a und b gl., so sind in dem Dr. **ABD** die beiden Seiten **AB** und **AD** = den S. **AC** und **AD** im Dr. **ACD**; eben so W. a=b; mithin in jedem 2 S. und der W., den sie einschließen, gleich; mithin sind die ganzen Dr. gleich.

Kämen die Kinder weder bei der vorhergehenden, noch bei dieser letzten Aufgabe, auf den eben gedachten Beweis, so muß der Lehrer sie auffordern, einen 3ten, nemlich den letzten Beweis, zu finden.

58ste Aufg. Man soll bei einem glsch. spw. Dr., dessen gleiche S. länger sind, als die ungleiche, aus einem der W., die von 2 ungl. S. eingeschlossen werden, nach der gegenüberst. S. eine L. ziehen, die diesen W. in 2 gl. Theile theilt, und angeben, ob die 3te S. in 2 gl. oder in 2 ungl. Th. getheilt wird?

Dr. **ABC** (s. Fig. 44) sey das gegebene glsch. Dr., **AB** und **BC** sind 2 ungleiche S. Der W. bei B wird durch L. **BD** in 2 gleiche Theile getheilt; was haben wir also eigentlich zu untersuchen?

Kdr. Ob L. **AC** bei **D** in 2 gleiche Theile getheilt ist, oder ob **AD = CD** ist?

Lhr. Wer kann mir diese Frage beantworten?

(Es werden sich mehrere dazu erbieten; der Lehrer wähle eines aus, es wird den Beweis ungefähr auf folgende Art führen:)

Kind. Wir haben 2 Dr. **BDC** und **ABD**, die verglichen werden sollen. W. a=b; allein die S., die diese beiden W. einschließen, sind ungleich, indem **AB** ungl. **BC** ist; also sind die ganzen Dr. ungl., mithin auch **CD** ungl. **AD**.

Lhr. Dieser Beweis läßt sich hören, aber er könnte doch

besser seyn, denn daraus, daß die Dr. BDC und BAD ungleich sind, folgt noch keineswegs, daß L. CD ungleich AD ist. Wir wollen aber einen bessern Beweis zu führen suchen.

Ich ziehe hier (indem er wieder auf Fig. 44 hinweist, aber eine Hülfs-L. DE zieht) L. DE (s. Fig. 45), und zwar so, daß BE = BC. Dann ist, weil BD gemeinschaftlich, und a = b, ein Winkel, und die beiden ihn einschließenden Seiten, in beiden Dr. EBD und DBC gleich; folglich sind diese selbst gleich; mithin ist S. ED = DC.

Wie kann ich nun wohl untersuchen und finden, ob S. AC gleich getheilt ist?

Kdr. Da muß ich das kleine Dr. ADE genauer untersuchen, dem größten W. steht die größte S. gegenüber, dem mittlern die mittlere u. s. w. (nach der 54sten Aufgabe).

Nun ist r der größte W., denn er ist ein stumpfer, weil c = d ein spitzer W. ist. S. AD, die dem größten W. r gegenübersteht, größer als S. DE, die dem kleineren W. o gegenübersteht; mithin muß, da DC = DE ist, auch AD gr. seyn als DC; folglich ist AC bei D durch L. BD ungleich getheilt.

59ste Aufg. Man soll dasselbe, wie in der vorhergehenden Aufgabe, aber bei einem glsch. rwkl. Dr. aufsuchen.

Lhr. Dr. ABC (s. Fig. 46) sey ein glsch. rwkl. Dr. Ich ziehe aus dem W. bei B nach der gegenüberstehenden S. AC eine L. BD, die diesen W. in 2 gleiche Theile theilt.

Bedürfen wir noch einer H. L.?

Kdr. Ja; es muß aus D auf BC eine L. so gezogen werden, daß W. b = W. a wird.

Lhr. Führe jetzt einer den Beweis. (Es ist derselbe, wie bei der vorhergehenden Aufgabe.)

Man soll dasselbe bei einem glsch. stw. Dr. aufsuchen.

Es sey Fig. 73, Tafel XV das gegebene Dr. Die Gleichheit der beiden Dr. ABD und DBE wird sich wie vorher beweisen lassen (es ist BE = AB gemacht) und damit zugleich, daß DE = AD sey. Ist nun DC = DE?

Der W. e ist als A. W. größer als g (denn er ist = g + b), daher ist er auch größer als W. h, denn dieser ist = g, weil Dr. ABD = Dr. DBE. — W. h ist aber als A. W. größer als W. f (denn er ist = f + b); da nun h größer als

f, e größer als h; so ist auch e größer als f; folglich auch DC, da sie dem größeren W. gegenübersteht, größer als DE oder AD.

Oder: W. c = W. d, weil die beiden Dr. ABD und DBE gleich sind. W. d + e = 2 r. W., aber W. c + f sind noch nicht 2 r. W., weil der dritte W. des Dr. ABC fehlt. Ich habe also mit e mehr hinzugesetzt zu d oder c, als mit f; folglich ist auch e größer als f ꝛc.

W. e ist jedesmal 2 mal so groß als f, denn W. f = 2b W. h = f + b = 3b; weil nun g = h, so ist auch g = 3b W. e aber ist = g + b = 3b + b = 4b; daher ist W. e = 4b, W. f aber = 2b; folglich ist e = 2f. — Oder, weil c + 2f = 2 r. W, d + e auch = 2 r. W., c aber = d, so ist auch e = 2f.

Man kann dasselbe bei einem ungls. Dr. vornehmen lassen, da sich abermals das nemliche ergeben wird, daß nemlich die S., die dem gleich getheilten W. gegenübersteht, in 2 ungleiche Theile getheilt wird. — Hieraus folgt nun allgemein:

„Wenn in einem Dr. aus einem W., der von 2 ungleichen S. gebildet wird, eine L. nach der gegenüberstehenden S. gezogen wird, die diesen W. in 2 gleiche Theile theilt, so wird jene S. dadurch in 2 ungleiche Theile getheilt."

60ste Aufg. In einem glsch. Dr. soll aus dem W., den die beiden gleichen Sch. einschließen, nach der gegenüberstehenden S. eine L. gezogen werden, die diesen W. in 2 ungleiche Theile theilt; es frägt sich:

Ob die 3te S. gl. oder ungl. getheilt wird?

Antw. Sie wird ungleich getheilt.

Lhr. Wer führt den Beweis? (die Kinder werden ihn jetzt finden.)

ABC sey das Dr. (s. Fig. 47) W. a ungleich b. Nun sind Dr., in denen 2 S. gleich, der zwischen ihnen liegende W. aber ungleich ist, ungleich; es ist dann auch die 3te S. des einen ungleich der 3ten S. des andern, folglich BD ungleich CD, mithin BC bei D ungleich getheilt.

Vielleicht würden die Kinder auch, um dasselbe zu beweisen, eine H. L. ziehen, um den W. bei A in 2 gleiche Theile zu

theilen; — dann zeige ihnen der Lehrer, daß man dasselbe ohne H. L. beweisen könne.

61ste Aufg. Man soll aus dem W. eines Dr., der von ungl. S. gebildet wird, eine L. nach der gegenüberst. S. ziehen, die diesen W. in zwei ungleiche Theile theilt, und angeben:

Ob auch die Seite ungleich getheilt werde?

Man wird hier leicht finden, daß man diese Th. L. willkührlich ziehen kann, nemlich so, daß der Theil der L. **BC**, der einen Sch. des W. a bildet, größer wird, als der andere Theil der L. **BC**, z. B. durch Th. L. **AF**, (s. Fig. 48), L. **BF** oder, daß er kleiner wird, z. B. durch Th. L. **AE**, L. **BE**; daß es also einen Fall geben muß, wo beide Theile der L. **BC** unter sich gleich werden, wie dies bei der Th. L. **AD** der Fall ist. (Man könnte auch sagen: Ich kann aus dem M. P. der S. **BC** nach dem ihr gegenüberstehenden W. eine L. ziehen.)

Nachtrag.

Zur Uebung des Scharfsinns mag hier folgende Aufgabe einen Platz finden.

62ste Aufg. Aus dem Sch. P. zweier W. eines ungls. Dr. seyen 2 L. gezogen, die diese W. in gl. Th. theilen; aus dem P., wo beide sich schneiden, sey eine 3te L. nach dem Sch. P. des 3ten W. gezogen, es frägt sich:

Theilt diese 3te L. den W. in gl. oder ungl. Theile?

ABC Fig. 49 sey das Dr. Die W. bei **A** und **C** sind durch die L. **AD** und **CD** gleich getheilt, sie treffen in **D** zusammen; aus **D** nach **B** ist L. **DB** gezogen; es frägt sich also: Ist W. a=b?

(Schwerlich werden die Kinder von selbst auf den Beweis kommen, der Lehrer stehe ihnen also bei, indem er ihnen sagt:)

Ich kann dieß nicht beweisen, ohne H. L. zu ziehen; ich ziehe aus **D** auf **AC** rwkl. L. **DE**; eben so aus **D** auf **BC** rwkl. L. **DF**.

(indem er es wirklich thut, s. Fig. 50).

Sind dann wohl gleiche Dr. vorhanden?

Kdr. Ja! die Dr. **CED** und **CFD** sind gl., denn:

W. m=n (weil der ganze W. bei C gleich getheilt ist), W. o=p, als r. W., also auch W. r=q; S. CD ist beiden Dr. gemein, also in beiden Dr. alle W. und eine ähnlich liegende S. gleich, also die ganzen Dr. gleich.

Lhr. Könnt ihr mir sagen, ob W. a=b sey?

Kdr. Nein! das wissen wir noch nicht.

Lhr. Da werden wir wohl noch eine H. L. ziehen müssen, und welche?

Kdr. Aus D rwkl. auf AB, L. DG.

Lhr. Hier! (indem er sie wirklich zieht, s. Fig. 50.) Könnt ihr es jetzt beweisen?

Kdr. Wir wollen versuchen. Dr. ADG = Dr. ADE. (Der Beweis ist wie bei Dr. EDC und FDC.) Nun war ED = FD, GD = ED; also auch GD = FD; W. c=x, als N. W. und r. W.

(Die Kinder würden hier, wenn das gegebene Dr. ein rwkl. wäre, sogleich den Beweis finden, weil W. a+b, W. c und W. x sämmtlich r. W. seyn würden, folglich DGBF ein Qu., DB eine Eck-L., folglich a=b; da aber das Dr. kein rwkl. ist, so werden sie im Beweise stocken; sie werden nicht zu beweisen wissen, ob nun auch S. GB = FB, oder ob die beiden andern W. außer c und x gleich sind; der Lehrer komme ihnen dann, wenn sie nach langem Nachdenken es dennoch nicht finden sollten, zu Hülfe (indem er Fig. 51 an die Tafel zeichnet, und H. L. GF zieht).

DG = DF, was für ein Dr. ist also Dr. DGF?

Kdr. Ein glsch.

Lhr. Welche W. in diesem Dr. müssen gleich seyn?

Kdr. t und u.

Lhr. Wie viel betragen W. t+s?

Kdr. t+s = einem r. W. als N. W. von dem r. W. d.

Lhr. Wie viel betragen W. u+v?

Kdr. Ebenfalls 1 r. W. als N. W. des r. W. p.

Lhr. Wer kann mir nun den Beweis führen?

(Vielleicht kommt nunmehr eines von den Kindern auf die Vollführung des Beweises:)

Gleiches von Gleichem abgezogen, bleibt Gleiches, also ist W. v=s; mithin Dr. GFB ein glsch.; S. GB und FB die

gleichen Sch., da nun GD = FD, S. GB = FB, S. BD aber sich selbst gleich, so sind auch die beiden Dr. GBD und BFD gleich, folglich auch W. a = b; mithin theilt L. DB den W. bei B in zwei gleiche Theile.

XX. Stufe. Einfluß einer Theilungs-L., die von einem P. einer S. eines Dr. nach einem P. einer andern S. desselben Dr. gezogen wird, auf die Gleichheit und Ungleichheit der getheilten Seiten.

63ste Aufg. Man soll irgend eine S. eines Dr. durch eine L., die man aus ihrer Mitte gll. mit einer andern S. des Dr. auf die 3te S. desselben zieht, in zwei gleiche Theile theilen; es frägt sich: ob dadurch auch die andere S. gleich getheilt werden wird? ABC sey das Dr. (s. Fig. 52), DE sey die Th. L. gll. mit BC. (Sollten die Kinder nicht von selbst auf den Beweis kommen, so zeichne der Lehrer die H. L. EF gll. AB; dann werden sie gewiß den Beweis finden; es ist folgender:)

W. m = a, als äußerer G. W. bei gl. L., W. n = o aus demselben Grunde, also auch W. d = b, also in den beiden Dr. ADE und EFC alle W. gl.; ferner AD = BD, EF als S. des Pgr. DEFB = BD, also EF = AD; mithin Dr. ADE = Dr. AFC; also auch S. EC = S. EA; folglich AC bei E gleich getheilt. (Hieraus folgt ferner:)

AE : AC = AD : AB und AD : AB = DE : BC.

64ste Aufg. Wenn in einem Dr. abc Taf. XII, Figur 21 die eine S. ab in 3 gl. Th. getheilt, und von den Th. P. d und e gll. mit der einen S. des Dr. die L. ef und dg gezogen werden, so frägt sich 1) ob sich dann die andere S. bc, welche von den Th. L. getroffen wird, ebenfalls in 3 gl. Th. theilt. 2) Wie sich die Th. L. zu einander verhalten?

Antw. 1. S. bc wird ebenfalls in 3 gl. Th. getheilt.

Antw. 2. Die Th. L. verhalten sich zu einander, wie die gleichliegenden S. der Dr., welche sie bilden helfen.

Auflös. Man ziehe dh und ek gll. mit bc, so werden die Dr. bef und edl und dah gleich seyn, daher auch bf =

el = dh. Weil aber el = fg und dh = gc, so ist auch bf = fg = gc; daher ist also auch bc in 3 gl. Th. getheilt.

Aus demselben Grunde ist auch ef = dl = ah. Es ist aber ef = kc, dl = hk, daher also ah = hk = kc, und folglich ef = $\frac{1}{3}$ ac, dg aber = $\frac{2}{3}$ ac.

Der Lehrer gehe nicht zu schnell über diese Sätze hinweg, obgleich sie nicht schwer sind, und lasse noch die Fälle, wo eine S. wie ab in 4 und dann in 5 gl. Th. getheilt ist, aufsuchen. Es muß durchaus erst deutlich werden, daß unter den oben angegebenen Bedingungen jederzeit sey:

bf der eben so vielte Theil von bc, als be von ba;
bg — — — — — — bc — bd — ba u. s. w.

Ferner daß

ef der eben so vielte Theil von ac, als be von ba;
dg — — — — — — ac — bd — ba u. s. w.

In diesem letzteren Falle muß man jederzeit von derjenigen Sp. des ganzen Dr. zu zählen anfangen, die der gll. gezogenen S. gegenüber liegt. Z. B. dg ist $\frac{2}{3}$ der L. ac, weil bg $\frac{2}{3}$ der Seite bc ist.

65ste Aufg. Wenn abc und ABC, Fig. 22, Taf. XII, ähnliche Dr. sind, und S. ab ist = $\frac{1}{3}$ der S. AB; wie verhält sich sodann bc zu BC und ac zu AC, d. h. der wie vielte Theil ist dann bc von BC und ac von AC, oder wie viele Male ist BC größer als bc, und AC größer als ac?

Auflös. Man lege das Dr. abc so auf das Dr. ABC, daß b auf B und die S. ab in die Richtung der S. AB falle: alsdann kann die Aufgabe wie die vorige aufgelöset werden, und es wird sich finden, daß bc $\frac{1}{3}$ von BC und ac $\frac{1}{3}$ von AC ist.

Anmerk. Der Lehrer vervielfältige diese Aufgaben, und gebe noch andere Zahlenverhältnisse, als die hier in den Beispielen aufgeführten, z. B. die Verhältnisse von ab : AB = 2 : 3 oder 3 : 4 oder 2 : 5 ꝛc.

66ste Aufg. Wenn 2 L. ae und bd, Fig. 23, sich in c schneiden und beide L. durch 2 gll. Linien ab und de begrenzt werden, deren Größenverhältniß zu einander bekannt ist; läßt sich nun finden, in welchem Verhältnisse sich die L. ac und bd schneiden? — d. h. läßt sich finden, der wie vielte Theil bc von bd, cd von bd, und ac und ce von ae sey?

Auflöſ. Beide Dr. ſind ähnlich, weil ab gll. mit dc gezogen iſt. Denn nun ſind acb und dce Sch. W., bae und aed W. W., und eben ſo abd und bde. Der eben ſo vielte Theil alſo ab von de, der eben ſo vielte Theil iſt bc von cd und ac von ce, wodurch auch das Verhältniß von bc und cd zu bd, und von ac und ce zu ae gefunden iſt.

Geſetzt es wäre ab der 3te Th. von de, ſo hat ab einen ſolchen Th. als de 3, daher bc auch einen ſolchen Th., wie dc 3, und ac einen, wie ce 3. Demnach iſt $ac = \frac{1}{4}$ ae und $bc = \frac{1}{4}$ von bd; eben ſo $ce = \frac{3}{4}$ ae und $cd = \frac{3}{4}$ bd, wie dies durch die angedeuteten L. in der Figur noch mehr verdeutlicht werden kann.

Wäre $ab = \frac{1}{4}$ de, ſo würde $bc = \frac{1}{5}$ db, $ac = \frac{1}{5}$ ae, $cd = \frac{4}{5}$ bd, $ce = \frac{4}{5}$ ac.

Wäre $ab = \frac{2}{5}$ de, ſo würde $bc = \frac{2}{7}$ db, $ac = \frac{2}{7}$ ae, $cd = \frac{5}{7}$ bd, $ce = \frac{5}{7}$ ac.

Wäre $ab = \frac{3}{7}$ de, ſo würde $bc = \frac{3}{10}$ db, $ac = \frac{3}{10}$ ae, $cd = \frac{7}{10}$ bd, $ce = \frac{7}{10}$ ac ꝛc.

Anmerk. Ueber dieſe Stufe eile der Lehrer ja nicht zu ſchnell hinweg. Einestheils ſind dieſe Aufgaben gerade die, auf welche das geſammte Feldmeſſen beruht, und ohne welche daſſelbe ſich nicht einmal einſehen läßt; anderentheils werden ſie in den folgenden Stufen auf mannichfache Weiſe angewendet, was aber nur möglich iſt, wenn ſie recht verſtanden ſind. Der Lehrer hat zugleich dadurch ein vorzügliches Mittel, den Kindern die Bruchverhältniſſe anſchaulich zu machen, deren Kenntniß bei den folgenden Aufgaben vorausgeſetzt wird. Dies iſt vorzüglich dann der Fall, wenn die zu den beiden übereinanderſtehenden Dr. gehörigen Seiten nur Theile von Linien ſind. Um dies mehr zu veranſchaulichen, ſtehe hier noch eine Aufgabe mit ihrer Auflöſung. Der Lehrer muß natürlich mit der Verlängerung nur einer Seite und mit einfachen Brüchen anfangen, und erſt nach und nach zu mehreren Seiten und ſchwereren Brüchen fortgehen.

Es ſey Fig. 24 ähnlich der vorigen beſchrieben. Jedoch iſt $ab = \frac{1}{8}$ df, $cf = \frac{1}{2}$ df, $bd = \frac{5}{6}$ dg, $ae = \frac{5}{7}$ he, es ſoll nun geſucht werden, der wie vielte Theil bc von dg, cd von dg, ac von he und ce von he iſt?

Auflös. Weil ef $= \frac{1}{2}$ df, so ist auch de $= \frac{1}{2}$ df. Nun hat ab einen Theil, wie df deren 8, de deren 4 hat; also hat auch bc einen Theil, wie cd 4, und ac 1 Theil, wie ce 4; oder ac $= \frac{1}{5}$ ae, ce $= \frac{4}{5}$ ae, bc $= \frac{1}{5}$ bd, cd $= \frac{4}{5}$ bd. Weil nun ae $= \frac{5}{7}$ he, so ist ac $= \frac{1}{5}$ ae $= \frac{1}{5}$ eines $\frac{5}{7}$ he. Es ist aber $\frac{1}{5}$ von $\frac{5}{7} = \frac{1}{7}$; daher ac $= \frac{1}{7}$ he. Eben so ist ce $= \frac{4}{5}$ ae $= \frac{4}{5} \times \frac{5}{7}$ he $= \frac{4}{7}$ he. Ferner ist bc $= \frac{1}{5}$ bd, bd aber $= \frac{5}{6}$ gd; demnach bc $= \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}$ dg $= \frac{1}{6}$ dg und cd $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ dg. Durch die punktirten L. kann dies noch deutlicher werden.

XXI. Stufe [a]). Verhältnißbestimmung der Stücke solcher sich schneidenden Linien, welche in Dr. von bestimmten Th. der S. aus gezogen werden.

Lhr. (Indem er Fig. 25, Tafel XIII an die Tafel zeichnet.) Hier habe ich ein Dr. abc; darin habe ich vom W. a nach der Hälfte der gegenüber liegenden S., nach d eine Linie gezogen, und eben so vom W. b aus, nach e. Wer kann jetzt finden, in welchem Verhältnisse sich die Linien ad und be schneiden, oder der wie vielte Theil fd und af von ad, und bf und fe von be sind.

Kdr. afe ist ein Dr.; wenn ich von d aus eine L. dg gll. mit ae ziehe, so erhalte ich ein ähnliches Dr. zum vorigen, deren Seiten sich daher bestimmen lassen, wenn ich das Verhältniß von zweien zu einander kenne.

Lhr. Gut. Dieses Verhältniß müssen wir nun suchen, und dazu dient uns die gezogene Hülfslinie. Wie war sie gezogen? — Kdr. Gleichl. mit ac.

Lhr. Durchschneidet sie die S. eines Dr.?

Kdr. Ja, be und bc.

Lhr. Welches ist die dritte S. dieses Dr.?

Kdr. ec; mit dieser geht auch gd gll.

Lhr. Richtig. Daher werdet ihr auch das Verhältniß von gd zu ec bestimmen können; denn ihr wißt das Verhältniß von bd zu bc.

Kdr. bd ist halb so groß als bc, darum ist auch gd halb so groß als ec.

Lhr. Oder auch als ae, weil ae = ec; wir können auch sagen: gd habe einen solchen Theil, als ae zwei. Damit haben wir aber schon das Verhältniß von zwei Seiten. Wer kann nun das Uebrige finden?

Kdr. Weil gd 1 solchen Theil, als ae 2 hat, so hat auch fd einen, wie fa 2 oder fd = $\frac{1}{3}$ ad und fa = $\frac{2}{3}$ ad.

Lhr. Die L. be ist noch zu bestimmen.

Kdr. gf hat auch 1 Th., wie fe 2; daher ist auch gf = $\frac{1}{3}$ und fe = $\frac{2}{3}$, aber nur von ge.

Lhr. Der wie vielte Theil von be ist ge?

Kdr. Die Häfte, denn bd = $\frac{1}{2}$ bc.

Lhr. Gut. Daher ist fe zweimal der dritte Theil von der Hälfte von be, oder $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ von be = $\frac{1}{3}$ von bc. Wie groß ist nun noch fb? — Kdr. Noch $\frac{2}{3}$ von be.

Anmerk. Diese Aufgaben lassen sich noch durch mehrere andere Hülfslinien eben so leicht lösen; man hätte auch von e aus eine L. gll. mit bc oder mit bc ziehen können. Eben so von e aus mit ad oder von d aus mit be gll.

Wäre die L. bd = $\frac{1}{3}$ bc, so würde fd = $\frac{1}{4}$ ad, und bf oder fe = $\frac{1}{2}$ be geworden seyn.

67ste Aufg. Man soll in Fig. 26 das Verhältniß der Stücke af, fd und fe, fb bestimmen, worin ae = $\frac{1}{4}$ ac und bd = $\frac{1}{3}$ bc ist.

Aufl. Man ziehe gd gll. mit ac, so ist gd = $\frac{1}{3}$ ec = $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ ac = $\frac{1}{4}$ ac = ae; daher auch af = fd = $\frac{1}{2}$ ad, und gf = fe = $\frac{1}{2}$ ge = $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ be = $\frac{1}{3}$ be; daher bf = $\frac{2}{3}$ be.

68ste Aufg. Es sollen eben so in Fig. 27 die Verhältnisse der zerschnittenen Stücke gesucht werden, worin bd = $\frac{1}{3}$ bc und ec = $\frac{1}{4}$ ac.

Auflös. Wir ziehen hier, der Abwechselung wegen, die L. ge gll. mit bc, dann wird ge = $\frac{3}{4}$ dc, (weil ae = $\frac{3}{4}$ ac) = $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ bc = $\frac{1}{2}$ bc, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; daher hat ge 3 solche Theile als bd 2, folglich auch fe 3, wie bf 2, oder bf = $\frac{2}{5}$ be und fe = $\frac{3}{5}$, eben so df = $\frac{2}{5}$ dg = $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$ (denn dg = $\frac{1}{4}$ da, weil ec = $\frac{1}{4}$ ac) = $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, und af = $\frac{9}{10}$ ad.

Der Lehrer kann dies noch weiter fortsetzen, und andere Beispiele wählen. Was auch für Zahlen gegeben seyn mögen, die Aufgaben sind immer zu lösen. Die nun folgenden sind

jedoch etwas schwerer. Die Reihenfolge dieser Uebungen ist aus Fig. 28 bis 34 zu ersehen. Beschränkten Raumes wegen können sie hier nur kurz durchgegangen werden. In Figur 26 und 27 waren beide L. aus W. gezogen. In Figur 28 bis 30 nur eine, die andere von S. auf S., und letztere geht entweder gll., Fig. 28, oder ungll. — Letzterer Fall ist doppelt; entweder wird eine S. des Dr. gar nicht getheilt, Fig. 29, oder alle 3 werden getheilt. In Fig. 31 bis 35 sind beide L. von S. auf S. gezogen; entweder beide mit S. gll., Fig. 31, oder nur eine gll. mit einer S. (abermals 2 Fälle Fig. 32 und 33), oder keine gll., wovon ebenfalls zwei Fälle, Fig. 34 und 35.

Beispiele mit ihren Auflösungen.

Fig. 28. Hier ist keine Hülfsl. nöthig; $de = \frac{1}{2}\ dc$, daher auch $dg = \frac{1}{2}\ da$, weil ge gll. mit ac; ge deshalb auch $\frac{1}{2}$ ac, $fe = \frac{2}{3}$ ac, daher $ge = \frac{1}{2}$ ac, $fe = \frac{2}{3}$ ac oder $ge = \frac{3}{6}$ ac, $fe = \frac{4}{6}$ ac, demnach hat ge 3 solche Th., wie fe 4 oder $ge = \frac{3}{4}$ fe und $fg = \frac{1}{4}$ fe.

Fig. 29. Man ziehe fh gll. mit ac, so ist $hf = \frac{1}{3}\ dc = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ ac $= \frac{1}{9}$ ac, cd aber ist $\frac{5}{12}$ von ac oder $\frac{15}{36}$ ac, hf oder $\frac{1}{9}$ ac $= \frac{4}{36}$ ac, hf hat also 4 solche Th. als de 15 hat; folglich auch fg 4 solche Th., wie ge 15, oder $fg = \frac{4}{19}$ fe und $ge = \frac{15}{19}$ fe. — Eben so ist $gd = \frac{15}{19}$ hd, letzteres aber $= \frac{2}{3}$ bd, folglich $gd = \frac{15}{19} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{19}$ bd; demnach $bg = \frac{9}{19}$ bd.

Fig. 30. Man ziehe fh gll. mit ba; zöge man sie nur bis k, so würde sich, wie man leicht sieht, fk nicht bestimmen lassen. Nunmehr ist $ah = \frac{1}{3}$ ac, $ad = \frac{1}{2}$ ac, hd also $= \frac{1}{6}$ ac, oder hd hat 1 solchen Theil als ad 3, oder $hd = \frac{1}{3}$ ad. — Die L. hk aber geht in dem Dr. abd gll. mit der Seite ab, und ist darum und weil $hd = \frac{1}{3}$ ad auch $\frac{1}{3}$ ab, wie $dk = \frac{1}{3}$ bd ist. Nun ist aber $fh = \frac{2}{3}$ ab, folglich hk $=$ kf, und $kf = \frac{1}{3}$ ab $= \frac{4}{12}$ ab; es ist aber $eb = \frac{3}{4}$ ab $= \frac{9}{12}$ ab, demnach hat fk 4 solche Theile als eb 9, also auch fg 4 wie ge 9, oder $fg = \frac{4}{13}$ ef und $ge = \frac{9}{13}$ ef. — Eben so ist $bg = \frac{9}{13}$ $bk = \frac{9}{13} \times \frac{2}{3}$ (weil $dk = \frac{2}{3}$) $= \frac{6}{13}$ bd, folglich $gd = \frac{7}{13}$ bd.

Fig. 31. Es ist keine Hülfslinie nöthig, da beide L. zweien S. gll. sind. — $hf = \frac{5}{12}$, $fc = \frac{3}{12}$, hf hat daher 5 Th., wie hc 8 (denn $hc = \frac{8}{12}$), folglich hat auch hg 5 solche Th. als

hd 8, oder hg = $\frac{5}{8}$ hd und gd = $\frac{3}{8}$ hd. Eben so ist fg = $\frac{5}{8}$ dc = $\frac{5}{8} \times \frac{2}{3}$ ac = $\frac{5}{12}$ ac; ef aber = $\frac{9}{12}$ ac; daher hat gf 5 Th., wie fe 9, oder fg = $\frac{5}{9}$ ef und eg = $\frac{4}{9}$ ef.

Fig. 32. Es ist wieder keine Hülfsl. nöthig, weil ef gll. mit ac. Nun ist hf = fc, folglich auch hg = gd, hg also = $\frac{1}{2}$ hd und gd = $\frac{1}{2}$ hd. Eben darum ist aber auch gf = $\frac{1}{2}$ dc = $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ ac = $\frac{3}{8}$ ac. — Es ist aber ef = $\frac{2}{3}$ ac = $\frac{16}{24}$ ac, und fg = $\frac{9}{24}$ ac; deswegen hat fg 9 solche Th. wie ef 16, oder fg = $\frac{9}{16}$ ef und eg = $\frac{7}{16}$ ef.

Fig. 33. Man ziehe hk gll. mit ab. Nun ist fh = bf, daher auch hk = $\frac{1}{2}$ be = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ab = $\frac{1}{4}$ ab; de aber ist auch = $\frac{1}{4}$ ab, daher hk = ed und folglich hg = gd = $\frac{1}{2}$ hd. Eben so ist eg = $\frac{1}{2}$ ek = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ef (weil fk = $\frac{1}{2}$ ef) = $\frac{1}{4}$ ef und gf = $\frac{3}{4}$ ef.

Fig. 34. Man ziehe fk gll. mit ac. Nun hat hf einen Theil, wie hc 3, daher fk = $\frac{1}{3}$ dc = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ ac = $\frac{1}{9}$ ac. Es hat aber ed $\frac{5}{12}$ oder $\frac{15}{36}$ ac; kf = $\frac{4}{36}$, demnach hat fk 4 solche Th. wie de 15, also auch fg 4 wie ge 15, oder fg = $\frac{4}{19}$ fe und ge = $\frac{15}{19}$ fe. — So ist nun auch dg = $\frac{15}{19}$ dk, letzteres aber $\frac{2}{3}$ hd, daher dg = $\frac{15}{19} \times \frac{2}{3}$ hd = $\frac{10}{19}$ hd und gh = $\frac{9}{19}$ hd.

Fig. 35. Man ziehe fl gll. mit ab, so wird fl = $\frac{2}{5}$ ab. Es ist aber ad = $\frac{2}{3}$ = $\frac{10}{15}$, al (weil bf = $\frac{3}{5}$ bc) = $\frac{3}{5}$ ac = $\frac{9}{15}$ ac; daher hat ld einen Th. wie ad 10, und ld = $\frac{1}{10}$ ad, folglich auch lk = $\frac{1}{10}$ ah = $\frac{1}{10} \times \frac{3}{4}$ ab = $\frac{3}{40}$ ab. Die Linie lf aber ist = $\frac{16}{40}$ ab, daher fk = $\frac{13}{40}$ ab. Nun ist eh = $\frac{20}{40}$ ab, folglich hat kf 13 solche Th. wie eh 20; daher auch gf 13 wie ge 20, oder es ist gf = $\frac{13}{33}$ fe, und ge = $\frac{20}{33}$ fe. Daher ist auch gh = $\frac{20}{33}$ hk; hk aber ist = $\frac{9}{10}$ hd (weil al = $\frac{9}{10}$ ad), demnach hg = $\frac{20}{33} \times \frac{9}{10}$ hd = $\frac{18}{33}$ hd = $\frac{6}{11}$ hd; folglich gd = $\frac{5}{11}$.

XXI. Stufe [b]). Verlängerung der S. eines Dr. und der in demselben gezogenen L., und Bestimmung des Verhältnisses der zerschnittenen Stücke.

69ste Aufg. Wenn in dem Dr. abc, Fig. 36, eine L. de von der Hälfte der S. ab nach dem 3ten Th. der S. cb

gezogeu ist, und man verlängert nun die L. de so lange, bis sie die verlängerte S. ac schneidet, wie groß sind die verlängerten Stücke cf und ef im Vergleich mit den übrigen Stücken der dazu gehörigen L. ac und de?

Auflös. Man ziehe dg gll. mit ac, so entstehen ähnliche Dr. deg und fec. Nun ist $gc = \frac{1}{2}$ bc (weil $da = \frac{1}{2}$ ab), ge ist demnach $= \frac{1}{6}$ bc, oder ge hat einen solchen Th. wie ce 2, folglich hat auch de einen wie ef 2, oder ef ist 2 mal so groß als de. Eben so hat cf 2 solche Th. wie dg 1; weil aber $dg = \frac{1}{2}$ ac, so hat ac auch 2 solche Th. wie dg einen, folglich ist $cf = ac$.

(Diese Aufgabe läßt sich auch durch eine Hülfsl. lösen, die von c gll. mit ab gezogen ist. Auch kann man die Hülfsl. von c aus gll. mit df nach ab, oder von d aus gll. mit bc nach ac ziehen.)

70ste Aufg. Wenn in dem Dr. abc, Fig. 37, von dem 3ten Theile der S. ab nach dem 4ten Th. der S. ac eine L. de, und nach der Hälfte der S. bc eine L. df gezogen wird, und man verlängert nun die gezogenen L. und die S. ac und bc so lange, bis sie einander schneiden, wie verhält sich dann ge : cd, gc : bc, hf : fd und hc : ac?

Auflös. Man ziehe durch den P. c die L. kl gll. mit ab, so entstehen die ähnlichen Dr. kec und dea, cfl und bfd. Es ist aber $cf = fb$; daher auch $cl = db = \frac{1}{3}$ ab, folglich ist cl die Hälfte von ad; demnach theilt die L. cl die S. ah und dh des Dr. ahd in zwei gl. Th., und es ist $ch = ac$, und $lh = dl$. Weil nun $fl = df$, so ist fh 3 mal so groß als df.

ec hat einen Th. wie ae 3, also auch kc einen wie ad 3, oder $kc = \frac{1}{3}$ ad $= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ ab $= \frac{2}{9}$ ab; daher hat kc 2 solche Th. wie bd 3, folglich auch (in dem Dr. dgb) gc 2 wie gb 3, d. h. gc 2 wie cb einen, oder gc ist noch einmal so groß als cb.

Nun ist auch gk noch einmal so groß als kd, oder kd $= \frac{1}{3}$ gd. Es ist aber (weil $ec = \frac{1}{4}$ ac) $ke = \frac{1}{4}$ kd $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ gd $= \frac{1}{12}$ gd. Weil nun $kg = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, so wird kg + ke $= \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ gd oder ge ist 3 mal so groß als ed.

Die Verhältnisse sind demnach folgende:

ge : ed = 3 : 1 oder ge = 3 ed
gc : bc = 2 : 1 oder gc = 2 bc
hf : fd = 3 : 1 oder hf = 3 fd
hc : ac = 1 : 1 oder hc = ac.

Anmerk. Es ist leicht einzusehen, wie mannigfaltig sich diese Aufgaben noch abändern lassen, doch hüte sich der Lehrer vor zu schwierigen Aufgaben, bei denen er leicht unnütz die Zeit verlieren könnte. Hat man Zeit, mehr ins Einzelne zu gehen, so kann es nicht schaden, besonders da durch diese Aufgaben die Bruchrechnung, wie die Anschauung der geometrischen Verhältnisse, auf gleiche Weise geübt wird. Daß man in diesen letzten Aufgaben übrigens mit Figuren mit äußeren Winkeln zu thun hat, wird man leicht bemerken.

71ste Aufg. In dem Dr. abe, Fig. 38, wird die S. ae nach g hin verlängert; von der Hälfte der S. ab soll eine L. dh gezogen werden, welche ag schneidet, jedoch in einem P. auf eg, der von c 10 mal so weit entfernt liegt als c von a. Auf den wie vielten Th. der S. bc muß die L. dh gezogen werden, oder der wie vielte Th. der L. bc muß ec seyn?

Lhr. Denkt euch jetzt die L. cg und eh so weit verlängert, bis sie einander schneiden, was werden dann diese L. mit der L. ec für eine Gestalt bilden? — Kdr. Ein Dreieck.

Lhr. In diesem würde dann die S. cg 10 mal so groß seyn als ac. Wir wollen uns nun zu diesem Dr. ein ähnliches verschaffen. Wie machen wir das?

Kdr. Wir ziehen von d aus eine L. df gll. mit ac.

Lhr. Kennen wir das Verhältniß dieser L. df zu ac?

Kdr. Ja; df ist halb so groß als ac, oder ac ist 2 mal so groß als df.

Lhr. Wie viel mal ist nun die L. cg größer als df?

Kdr. cg ist 10 mal größer als ac; ac ist 2 mal größer als df, also ist cg 20 mal größer als df.

Lhr. Wie verhält sich nun ce zu ef?

Kdr. Weil die beiden Dr. ähnlich sind, so ist ce auch 20 mal größer als ef.

Lhr. Der wie vielte Theil ist nun ef von fc?

Kdr. Der 21ste, denn ce hat 20 Theile wie ef einen.

Lhr. Der wie vielte Theil ist aber fc von der L. bc?

Kdr. Die Hälfte.

Lhr. Also ist se der 21ste Theil von der Hälfte der S. bc. Wie viel ist der 21ste Theil der Hälfte?

Kdr. Der 42ste Th. vom Ganzen.

Lhr. Recht! se ist also der 42ste Th. von bc. Wie viel ist bf in 42steln ausgedrückt?

Kdr. bf ist ein Halb oder $\frac{21}{42}$.

Lhr. Und nun se dazu genommen?

Kdr. Macht zusammen $\frac{22}{42}$ oder $\frac{11}{21}$.

Lhr. So groß ist also be; wie viel ist nun noch die Linie ec? — Kdr. Ein Ganzes weniger $\frac{11}{21}$ oder $\frac{10}{21}$.

Lhr. Recht! Ich hätte auch sagen können: ein Halbes weniger $\frac{1}{42}$, und hätte dasselbe erhalten. Wohin muß also gezogen werden, wenn cg 10 mal so groß als ac seyn, und von d angefangen werden soll zu ziehen?

Kdr. Auf $\frac{11}{21}$ der L. bc, von b an gerechnet.

Anmerk. Diese Aufgaben kann der Lehrer ebenfalls mannigfach abändern, auch durch eine andere Hülfsl., von d aus mit ab gll. gezogen, finden lassen. Die gezogene L. wäre z. B. in der vorigen Fig. $= \frac{10}{11}$ ad $= \frac{10}{11}$ bd, hätte daher 10 Th. wie bd 11, und deswegen muß auch ce 10 Th. haben, wie be 11, d. h. ec wäre $\frac{10}{21}$ bc, be $= \frac{11}{21}$ bc. Auch das Verhältniß der L. eh zu de kann gesucht werden, und würde hier seyn wie ce : ef $=$ 20 : 1.

XXII. Stufe [a]). Gleichheit und Ungleichheit der W. in Dr., die dadurch entstehen, daß man Qu., Pgr. u. s. w. durch Ecklinien theilt.

72ste Aufg. Es frägt sich, ob bei einem Qu. a) die W. desselben durch eine Eck-L. in gl. oder in ungl. Theile getheilt werden? b) ob die beiden dadurch entstehenden Dr. gl. sind?

Kdr. Die W. eines Qu. werden a) durch eine Ecklinie in 2 gl. Theile getheilt, und b) das Quadrat selbst wird durch die Eck-L. ebenfalls in 2 gl. Dr. getheilt.

Lhr. Beweis't mir das!

Bew. ABCD Fig. 53 sey das Qu., BD sey die Eck-

linie; BDA und BDC sind 2 Dr., die 3 gl. S. haben (weil AB und AD, BC und DC als S. eines Qu. gl. sind, BD sich selbst gl. ist); folglich sind sie gl.; folglich sind auch die W. =; folglich, da a=b, c=d, jeder W. = ½ r. W. ist, auch a=d und b=c; mithin sind die W. bei B und D gl. getheilt.

(Eben das ist bei der Raute der Fall.)

73ste Aufg. Es frägt sich: a) Ob eine Ecklinie, die in einem Pgr. gezogen wird, das 2 Paar unter sich ungl. S. hat, dasselbe in 2 gl. Dr. theile? und b) ob sie die W. in gleiche oder in ungleiche Theile theile?

Kdr. a) Die beiden Dr. sind gl.

b) die W. aber werden durch die Ecklinie in ungleiche Theile getheilt.

Lhr. ABCD Fig. 54 sey ein solches Pgr.

Wer den Beweis führen will, trete an die Tafel.

Ein Kd. (Ecklinie BC Fig. 54 a zeichnend.)

a) In den beiden Dr. CBA und CBD ist S. AB = CD, AC=BD, BC sich selbst gl., also haben beide Dr. 3 gl. S., folglich sind sie gl.

b) In dem Dr. ABC steht dem W. c die kleinste S. AC gegenüber; dem W. a die mittlere S. AB; folglich sind beide W. ungleich, und zwar ist a der größere, c der kleinere; nun ist in dem Dr. BCD W. d=a, als W. W. bei gll. L., mithin, da a gr. als c, auch d gr. als c, folglich ihm ungleich; folglich ist der ganze W. bei B ungl. getheilt; eben das gilt von dem W. bei C.

Lhr. Es folgt hieraus allgemein:

Jedes Pgr. wird durch eine Eck-Linie seinem Flächenraume nach in zwei gleiche Dr. getheilt.

74ste Aufg. Es frägt sich: Ob alle 4 Dr., die dadurch entstehen, daß man in einem Qu. 2 Eck-L. zieht, einander gleich sind.

Antw. Die 4 Dr. ꝛc. sind einander gleich.

Lhr. Wer beweis't es mir?

Ein Kd. Wenn das Qu. ABCD Fig. 54 b das gegebene ist, und L. BC und AD die Eck-L. sind, so sind die Dr. ADB und ADC = (s. die 72ste Aufg.); W. a und b jeder = ½ r. W., eben so W. c und d jeder = ½ r. W., folg-

lich in allen 4 Dr., ABE, ACE, CDE, BDE, in jedem eine S. (AB, AC, CD, DB) und beide an dieser S. liegende W. gleich, also auch die übrigen S. EA, EB, ED, EC gl., und die ganzen Dr. gl.

75ste Aufg. Es frägt sich: Ob alle 4 Dr., die dadurch entstehen, daß man in einem Pgr. mit ungl. S. 2 Eck-L. zieht, einander gl. sind?

Antw. Nur 2 und 2 Dr. sind einander gleich, nemlich je 2 und 2 gegenüberliegende.

Lhr. ABCD Fig. 54 c sey das Pgr.; GB und AD die beiden Eck-L. Vergleicht jetzt zuerst die beiden Dr. ABE und CDE; werden sie gl. seyn?

Kdr. Ja, denn W. a = d, als W. W. bei gll. L., eben so b = c; S. AB = CD, also beide Dr. gl.

Lhr. Jetzt vergleicht Dr. BDE mit Dr. ACE.

Kdr. Auch diese beiden Dr. sind einander gl.; der Beweis ist wie der vorhergehende.

Lhr. Es folgt hieraus:

daß die beiden einander gegenüberliegenden Dr. gl. sind.

Jetzt wollen wir auch die nebeneinander liegenden Dr. vergleichen. Werden Dr. BCE und CED gl. seyn?

Kdr. Nein; Dr. BDE und CDE sind nicht gl.; denn S. BE = S. CE; S. DE beiden Dr. gemein, allein W. m ungl. W. n, also in beiden 2 S. gleich, der W., den sie einschließen, ungl.; also die ganzen Dr. ungleich.

XXII. Stufe [b]). Verhältnißbestimmung der Stücke solcher sich schneidenden L., welche in Pgr. von bestimmten Th. der S. aus gezogen werden.

76ste Aufg. In dem Quadrate Fig. 39 ist eine Eckl. von a nach d gezogen, sodann von einem Viertel der S. ab nach einem Viertel der S. cd die L. ef; wie schneiden sich beide?

Auflös. Weil ae = fd, so ist auch ag = gd und ag = gf, d. h. gf oder eg = ½ ef und ag oder gd = ½ ad. Dies ist jedesmal der Fall, wenn fd = ae, oder eb = cf.

Es giebt hier, je nachdem vom W. oder von der S. aus

nach einem anderen W. oder einer anderen S. gezogen wird, eine Menge von Fällen, deren Reihenfolge der Lehrer durch Hülfe der Fig. 39 bis 45 sich leicht wird aufsuchen können. Die folgenden Aufgaben sind aber nur einzelne aus dieser Reihenfolge, und es giebt zwischen jeder noch Mittelstufen. Die Aufgaben sind aus den Figuren (sämmtlich Quadrate) leicht zu entnehmen; daher mag hier der Kürze wegen nur die Auflösung einer jeden stehen.

Fig. 40. he $= \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ ab; fk $= \frac{5}{12}$ cd; weil aber ed $=$ ab, so ist auch fk $= \frac{5}{12}$ ab; folglich hat he 6 Theile wie fk 5, oder es ist hg $= \frac{6}{11}$ hk und gk $\frac{5}{11}$ hk, und ge $\frac{6}{11}$, gf $\frac{5}{11}$ ef.

Fig. 41. Man ziehe fh gll. mit cd, so ist fh $= \frac{2}{3}$ cd $= \frac{2}{3}$ ab $= \frac{5}{12}$ ab; eb aber $= \frac{9}{12}$ ab. Es hat also eb 9 Theile wie fh 8, daher ist eg $= \frac{9}{17}$ ef und gf $= \frac{8}{17}$ ef; ferner bg $= \frac{9}{17}$ bh $= \frac{9}{17} \times \frac{2}{3}$ bc $= \frac{6}{17}$ bc; folglich gc $= \frac{11}{17}$ bc.

Fig. 42. Man ziehe von a nach k die L. ak, so wird ahkc in 2 Dr. zerlegt, in akh und cak. Nun ist el $= \frac{1}{3}$ ck $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ cd $= \frac{1}{12}$ cd $= \frac{1}{12}$ ab. Es ist aber al $= \frac{1}{3}$ ak, folglich lk $= \frac{2}{3}$ ak; demnach auch lg $= \frac{2}{3}$ ah $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ ab $= \frac{1}{2}$ ab; eg $=$ el $+$ lg $= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$ ab $= \frac{7}{12}$ ef, folglich gf $= \frac{5}{12}$ ef. — Weil nun kl $= \frac{2}{3}$ ak, so ist auch kg $= \frac{2}{3}$ kh, und also gh $= \frac{1}{3}$ kh.

Fig. 43. Man ziehe lf gll. mit cd, so wird lk $= \frac{1}{3}$ ah $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ ab $= \frac{1}{6}$ ab $= \frac{1}{6}$ lf (weil lf $=$ ab); folglich ist kf $= \frac{5}{6}$ lf oder $\frac{5}{6}$ ab $= \frac{10}{12}$ ab. Weil aber eh $= \frac{3}{12}$ ab, so hat eh 3 solche Th. als kf 10, folglich ist eg $= \frac{3}{13}$ ef und gf $= \frac{10}{13}$ ef; ferner hg $= \frac{3}{13}$ hk $= \frac{3}{13} \times \frac{2}{3}$ hc $= \frac{2}{13}$ hc, folglich gc $= \frac{11}{13}$ hc.

Fig. 44. Man ziehe fk gll. mit cd, und dann die Linie bd, so wird fl $= \frac{1}{3}$ hb $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ ab $= \frac{1}{12}$ ab; kl $= \frac{2}{3}$ md $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ cd $= \frac{6}{12}$ cd; kf also $=$ kl $+$ lf $= \frac{7}{12}$ cd; eh $= \frac{6}{12}$ ab, daher hat eh 6 Theile wie kf 7, und folglich eg $= \frac{6}{13}$ ef, gf $= \frac{7}{13}$ ef; ferner hg $= \frac{6}{13}$ hk $= \frac{6}{13} \times \frac{2}{3}$ hm $= \frac{4}{13}$ hm; daher gm $= \frac{9}{13}$ hm.

Fig. 45. Man ziehe el und fn gll. mit ab, um ähnliche Dr. zu bekommen. Dann ziehe man die L. ak und hd. Nun ist em $= \frac{1}{3}$ ck $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ cd $= \frac{1}{12}$ cd; ml $= \frac{2}{3}$ ah $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

ab = $\frac{6}{12}$ ab, folglich el = $\frac{7}{12}$ ab; ferner ist of = $\frac{1}{2}$ hb = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$ ab = $\frac{1}{8}$ ab; no = $\frac{1}{2}$ kd = $\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{4}$ cd = $\frac{3}{8}$ cd; nf demnach = $\frac{4}{8}$ cd = $\frac{1}{2}$ cd = $\frac{6}{12}$ cd. Folglich hat el 7 solche Theile als nf 6, also auch eg 7 wie gf 6 Theile, oder eg = $\frac{7}{13}$ ef, gf = $\frac{6}{13}$ ef. Eben so ist ng = $\frac{6}{13}$ nl; weil aber lh = $\frac{1}{3}$ kh und nk = $\frac{1}{2}$ kh ist, so ist nl = $\frac{1}{6}$ kh, folglich ng = $\frac{6}{13}$ × $\frac{1}{6}$ kh = $\frac{1}{13}$ kh oder $\frac{2}{26}$ kh. Dazu nun nk = $\frac{1}{2}$ kh = $\frac{13}{26}$ gerechnet, giebt für kg $\frac{15}{26}$ kh. Demnach ist gh = $\frac{11}{26}$ kh.

(Eine solche gll. L., wie z. B. die L. cl und ef in der 25. Fig., oder kf in der 24. Fig., oder kf in der 23. Fig., oder eg und gf in der 22. Fig., läßt sich jederzeit leicht finden, wenn man die beiden mit ihr gleichl. Stücke desjenigen Prl. Tr., in welchem sie steht, mit den nicht daran gelegenen Stücken der zerschnittenen L. multiplicirt, und dann die Producte addirt; z. B. um in Fig. 42 die L. eg zu finden, wird ck mit ae und ah mit ec multiplicirt, und die Producte addirt.)

Anmerk. Was hier mit den Quadraten geschehen ist, kann eben so und ohne größere Schwierigkeit mit jedem Pgr. gethan werden; auch auf die P. Tr. läßt es sich anwenden; nur muß dann das Verhältniß der beiden gll. L. zu einander gegeben werden.

XXII. Stufe c). Verlängerungen der in den Qu. gezogenen L. und der S.

77ste Aufg. Fig. 46 sey ein Qu., in welchem eine L. eg von einem Viertel der S. cd nach $\frac{1}{3}$ der S. ab gezogen worden. Diese L. werde so lange verlängert, bis sie die verlängerte S. db in f schneidet. Es soll gefunden werden, wie sich bf zu db und gf zu ge verhält.

Auflös. gb = $\frac{1}{3}$ ab = $\frac{1}{3}$ cd = $\frac{4}{12}$ cd; es ist aber ed = $\frac{9}{12}$ cd; daher hat gb (welche gll. mit cd) 4 solche Theile als ed 9, folglich hat auch fb 4 solche Th. wie fd 9, oder fb hat 4 wie bd 5. Folglich ist fb = $\frac{4}{5}$ bd und fg = $\frac{4}{5}$ ge.

Anmerk. Diese Aufgaben lassen sich sehr vermannigfaltigen. Man hat auch hier wieder mit Vielecken mit äußeren W. zu thun, und man kann die Aufg. jederzeit auf mehr als eine

Weise lösen, worin der Lehrer die Kinder nicht beschränken muß. Die Hülfslinien wird sich das Kind gewiß sehr bald selbst herausfinden, und wenn es Schwierigkeiten finden sollte, so werden einige Winke des Lehrers genügen. — Soll diese letztere Art von Aufg. auch auf andere Pgr. angewendet werden, so muß das Verhältniß der ungl. S. zu einander bekannt seyn.

Bisher war von den W. und S. geschlossener Figuren die Rede, ohne Rücksicht auf den Inhalt derselben, jetzt ist alles gehörig vorbereitet, um auch den Inhalt der Figuren berechnen und vergleichen zu können.

Damit wird sich der folgende Abschnitt beschäftigen.

III. Abschnitt. Vergleichung des Inhalts geschlossener Figuren.

XXIII. Stufe. Auffinden des Inhalts eines Dreiecks, Quadrats, Fünfecks u. s. w.

Lhr. Wir wollen jetzt in Qu., R. E. und Rauten u. s. w. Eck-L. ziehen, und zusehen, was sodann in Hinsicht der Gleichheit der dadurch entstehenden Dr. und ihres Inhalts Statt finden werde?

Zuerst wollen wir aber sehen, wie man den Inhalt einer Figur finden kann, die von geraden L. begrenzt wird.

Kann ich eine gerade L. wohl messen?

Kdr. Ja, jede gerade L. kann man messen.

Lhr. Auf welche Weise geschieht dieses Messen?

Kdr. Durch Hülfe eines Maaßstabes.

Lhr. Jeder Maaßstab stellt eine gerade L. vor, die ein bestimmtes Maaß hat; so hat man Maaßstäbe, die die Länge eines Zolles, eines Fußes, einer Elle, einer Klafter, einer Ruthe andeuten, wie wir das schon aus dem Unterrichte im Rechnen wissen (s. die 25ste Stufe meines Leitfadens zum Unterrichte im Rechnen, 2te Ausg.). Ist die Länge, die der Maaß-

stab vorstellen soll, gröſser, als seine wirkliche Länge, so nennt man ihn

einen verjüngten Maaßstab.

Hier (indem er den Kindern einen Maaßstab vorzeigt, der eine Ruthe lang ist, und auf welchem die 12 Fuß angemerkt, der letzte Fuß in 12 Zolle getheilt ist), meßt einmal das Schulzimmer aus, wie wir das schon beim Rechnen gethan haben (s. die 26ste Stufe des Leitfadens zum Unterrichte im Rechnen, 2te Auflage).

(Nachdem die Kinder dieses gethan, fahre der Lehrer fort, indem er ein Qu. an die Tafel zeichnet, und dieses durch eine Ecklinie in 2 gleiche Theile theilt, wie bei Fig. 53.)

Die Länge einer S. dieses Qu. beträgt wirklich nur ungefähr einen Zoll; allein, wenn ich sie als einen verjüngten Maaßstab betrachte, so kann sie auch eine gröſsere Länge oder Entfernung andeuten, z. B. diese eine S. des Qu. kann jetzt die Länge einer Ruthe, einer Meile, eines Grades (der 15 Meilen beträgt) vorstellen (indem er eine L. gleich der Entfernung zwischen Berlin und Potsdam auf der Karte von Deutschland an die Tafel zeichnet, auf diese L. hinzeigend).

Diese L. ist ein verjüngter Maaßstab; hier auf dieser Land-Karte deutet eine Entfernung gleich dieser L. eine Länge von 4 Meilen an (indem er die Linie an der Tafel mißt, und das Maaß mit dem verjüngten Maaßstabe der Land-Karte von Deutschland in gewöhnlichem Formate vergleicht).

Angenommen nun, die eine S. des Qu. beträgt 4 Meilen, wie groß wird der Inhalt des Qu. seyn?

Kdr. Der Inhalt des Qu. wird sodann 16 Qu.-Meilen betragen.

Lhr. Wie habt ihr das gefunden?

Kdr. Wir haben diese S. des Qu., deren Länge wir kannten, mit sich selbst multiplicirt.

Lhr. Und warum das?

Kdr. Weil bei einem Qu. alle S. einander gleich sind, also die Breite gleich der Länge ist, und weil bei rwkl. Pgr. man nur die Länge mit der Breite multipliciren darf, um den Inhalt zu finden.

Lhr. Richtig! Hier (auf Fig. 53 zeigend) ist aber nun das Qu. durch eine Ecklinie in 2 Dr. getheilt.

78ste Aufg. Es frägt sich, ob die beiden Dr., die dadurch entstehen, daß man in einem Qu. eine Eck-L. zieht, unter sich und dem Inhalte nach einander gleich sind?

Kdr. Die Dr. sind einander gleich.

Lhr. Beweiset es mir!

Kdr. Alle S. eines Qu. sind einander gleich; die Ecklinie ist sich selbst gleich, also sind in beiden Dr. die 3 S. des einen gleich den 3 S. des andern; folglich sind die ganzen Dr. einander gleich. (s. die 72ste Aufg.)

Lhr. Richtig! Wie wird es nun aber mit dem Inhalte beider Dr. stehen? Wird der Inhalt beider ebenfalls gleich seyn?

Kdr. Ja, beide Dr. haben gleichen Inhalt.

Lhr. Ich fordere, wie immer, den Beweis.

Kdr. Beide Dr. sind gleich, also beträgt der Inhalt eines jeden derselben die Hälfte des Inhalts des ganzen Qu., folglich ist der Inhalt beider gleich.

Lhr. Richtig. Nun hatten wir die Länge einer S. zu 2 Ruthen angenommen, so daß der Inhalt des Qu. 4 Qu.-Ruthen betragen hatte; wie viel beträgt also nun der Inhalt eines jeden der beiden Dr.?

Kdr. 2 Qu.-Ruthen.

79ste Aufg. Es frägt sich, ob ein R.E. durch eine Ecklinie in 2 unter sich und dem Inhalte nach gleiche Dr. getheilt werde?

Lhr. (indem er ein R.E. **ABCD** Fig. 55 a an die Tafel zeichnet.)

Hier beträgt die Länge doppelt so viel als die Breite; wir wollen die Breite zu 2 Fuß annehmen, wie viel wird der Inhalt des R.E. betragen? — Kdr. 8 Quadrat-Fuß.

Lhr. Richtig!

Ich ziehe nunmehr die Ecklinie **BC** (indem er es wirklich thut). Da entstehen abermals 2 Dr.; werden diese dem Inhalte nach gleich seyn?

Kdr. Ja, sie sind dem Inhalte nach gleich, denn beide haben jedes 3 S., die den 3 S. des andern Dr. gleich sind.

Lhr. Wie viel wird nun der Inhalt eines solchen Dr. betragen?

Kdr. Der Inhalt eines jeden Dr. wird die Hälfte von 8 Qu.-Fuß, mithin 4 Qu.-Fuß betragen.

Lhr. Richtig! (indem er eine Raute an die Tafel zeichnet, und diese durch eine Ecklinie theilt [s. Fig. 55 b], z. B. die Länge einer jeden S. sey hier 2 Fuß.)

80ste Aufg. Wie kann der Inhalt einer Raute gefunden werden, deren Seiten gegeben sind?

(Sollte ein Kind auf die Frage, welches der Inhalt dieser Figur sey? vielleicht antworten: 4 Qu.-Fuß, so dürfte der Lehrer nur Fig. 56 an die Tafel zeichnen, und dann, um dasselbe auf den Irrthum aufmerksam zu machen, verfahren, wie folgt (auf Fig. 56 zeigend). S. AB sey 2 Fuß lang; wie lang wird S. CD seyn? — Kdr. Auch 2 Fuß.

Lhr. Aber die S. EF, FD, EC?

Kdr. Ebenfalls 2 Fuß lang.

Lhr. Wie verhalten sich also die S. der Raute zu den S. des Qu.? — Kdr. Sie sind gleich.

Lhr. Nun wollen wir sehen, ob auch der Inhalt beider Figuren gleich ist.

(indem er die Seite EF bis G verlängert.)

Wer kann mir jetzt beweisen, daß beide Figuren gleichen Inhalt haben?

(Die Kinder werden sich zum Beweise des Gegentheils erbieten, um ihn auf folgende Art zu führen:)

In den beiden Dr. HFD und GEC sind W. a=b (als äußerer G.W. bei gll. L.), c=d, S. EC = S. FD, also eine S. mit zwei an derselben liegenden W. gleich, mithin die ganzen Dr. gleich. Nun ist Tr. CDEH sich selbst gleich. — Gleiches zu Gleichem hinzugethan, giebt Gleiches; folglich ist das R.E. GHCD = der Raute CDEF.

Ferner ist das R.E. GHCD um das R.E. ABGH kl. als das Qu. ABCD, folglich ist auch die Raute CDEF kl. als das Qu., mithin ist ihr Inhalt kl. als der Inhalt des Qu.

(Auf gleiche Weise würde das Kind, das gleich Anfangs den Inhalt als kleiner angegeben hat, den Beweis führen.)

Lhr. Aber wie wird man nun den Inhalt von Figuren finden, die nicht rwkl. sind, wie diese Raute hier (auf CDEF Fig. 56 hinzeigend)?

(Schwerlich werden die Kinder von selbst darauf kommen, dann verfahre der Lehrer wie folgt:)

Lhr. Bei allen geradlinigen Figuren nimmt man irgend eine S. als die Grundlinie (Basis) an; z. B. hier bei dieser Raute S. CD.

Bei dem Pgr. bezeichnet der senkrechte Abstand der S., die mit der Grundlinie gll. ist, die Höhe der Figur, oder man nennt diesen senkrechten Abstand die Höhe.

Was ist also hier (auf Fig. 56 zeigend) die Höhe der Raute CDEF?

Kdr. L. GC ist die Höhe der Raute CDEF.

Lhr. Wir wollen sie nun messen (absichtlich muß GC nur halb so groß, als CD oder AC gezeichnet werden.)

Da das Maaß der L. GC in dem der L. CD 2 mal enthalten ist, so ist ihre Länge 1 Fuß; der Inhalt des R. E. GHCD also 2 Qu.-Fuß. Nun haben wir vorhin gesehen, daß der Inhalt des R. E. GHCD = war dem Inhalte des Pgr. EFCD. (Der vorhergehende Beweis kann hier wiederholt werden.)

Wie viel wird also der Inhalt des Pgr. betragen?

Kdr. So viel, als der Inhalt des R. E. GHCD, also 2 Qu.-Fuß.

Lhr. Mithin nur halb so viel, als der Inhalt des Qu. ABCD betragen hatte.

So kann ich nun also den Inhalt jedes Pgr. finden, wenn ich dessen Grundlinie mit der Höhe multiplicire, oder wenn ich das Maaß der einen S. mit dem Maaße ihres senkrechten Abstandes von der mit ihr gleichlaufenden S. multiplicire.

81ste Aufg. Man soll den Inhalt eines der beiden Dr. finden, die dadurch entstehen, daß man in einem Pgr. eine Ecklinie zieht.

(Die Kinder werden dieses wahrscheinlich auf die Weise machen, daß sie den Inhalt des Pgr. auf die bei der vorigen Aufgabe angegebene Weise suchen, und sodann von dem gefundenen Inhalte die Hälfte nehmen.)

Der Lehrer zeige ihnen jedoch den kürzesten Weg, indem

er das Pgr. EFCD durch Linie ED in 2 gleiche Theile theilt (s. Fig. 57), sodann aus E auf CD, die Grund-Linie des Dr. CDE eine rwkl. L. EI zieht, und dann fragt:

Was bezeichnet L. EI, die ich senkrecht von E auf I beschrieben habe?

Kdr. EI bezeichnet die Höhe des Pgr. EFCD.

Lhr. So wie EI die Höhe des Pgr. EFCD bezeichnet, so bezeichnet EI auch die Höhe des Dr. CED.

Wenn ich nun die ganze Grund-Linie CD mit der ganzen Höhe EI multiplicire, was finde ich dann?

Kdr. Dann finde ich den ganzen Inhalt des Pgr.

Lhr. Wenn ich aber nur die Hälfte der ganzen Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplicire, was werde ich dann finden?

Kdr. Dann finde ich nur die Hälfte des Inhalts.

Lhr. Wenn ich nun die Hälfte der Höhe mit der ganzen Grundlinie multiplicire, was werde ich dann finden?

Kdr. Die Hälfte des ganzen Inhalts des Pgr.

Lhr. Wie viel beträgt der Inhalt des Dr. CDE, in Vergleichung mit dem Inhalte des Pgr. EFCD?

Kdr. Der Inhalt des Dr. EDC ist die Hälfte des Inhalts des Pgr. CDEF.

Lhr. Ist das nur bei diesem Dr. und bei diesem Pgr. der Fall?

Kdr. Nein, es ist bei allen Dr. der gleiche Fall, die dadurch entstanden sind, daß man ein Pgr. durch eine Ecklinie in 2 Dr. getheilt hat.

Lhr. Es folgt also hieraus allgemein:

Jedes Pgr. wird durch eine Eck-L. in 2 dem Inhalte nach gleiche Dr. getheilt.

Was wird nun daraus folgen, in Beziehung auf die Berechnung des Inhalts?

Kdr. Um den Inhalt eines der beiden Dr. zu finden ꝛc., darf ich nur dessen ganze Höhe mit der halben Grund-L., oder dessen ganze Gr.-L. mit der halben Höhe multipliciren; das Produkt ist der Inhalt des Dr.

Lhr. Richtig!

82ste Aufg. Man soll den Inhalt eines jeden gegebenen Dr. finden.

Lhr. (indem er irgend ein Dr., z. B. Dr. ABC, Fig. 58, an die Tafel zeichnet.)

Wie werden wir den Inhalt dieses Dr. finden?

Kdr. Wir nehmen an, BC sey die Grund-L.; dann ziehen wir aus dem Sch. P. des ihr gegenüberstehenden W., aus A, auf die Grund-L. BC, eine rwkl. L. AD. Nunmehr messen wir die Grund-L. BC und die Höhe des Dr. oder L. AD; dann nehmen wir die Hälfte der Grund-L., und multipliciren sie mit der Höhe, oder wir multipliciren die ganze Grund-L. mit der Hälfte der Höhe, so finden wir den Inhalt des Dreiecks.

Lhr. Angenommen, die Grund-L. sey 6 Fuß lang, die Höhe betrage 4 Fuß, wie viel wird der Inhalt des Dr. betragen? — Kdr. 12 Quadrat-Fuß.

denn $\frac{6}{2}=3$; $3\times4=12$.

oder $\frac{4}{2}=2$; $2\times6=12$.

83ste Aufg. Man soll den Inhalt eines Tr. finden.

Lhr. (auf Fig. 59 zeigend), ABCD sey ein Tr.; wie wird man dessen Inhalt finden können?

Kdr. Ich theile das Tr. durch eine Eck-L. in 2 Dr.; sodann nehme ich S. CB als Grundlinie des Dr. ABC an, ziehe aus A auf BC die rechtwinkliche L. AE, multiplicire die Hälfte der S. CB mit AE, oder die Hälfte der Höhe AE, mit der ganzen Grundlinie CB, und merke mir das Produkt an; sodann nehme ich in dem Dr. ABD S. AB als die Grund-L. an, ziehe aus D, dem Sch. P. des der Grund-L. gegenüberstehenden W. auf die Grund-L. AB eine rwkl. L. DF, welche die Höhe des Dr. ABD bezeichnet, messe beide L., und multiplicire die Hälfte der einen L. mit der ganzen andern L. Das Produkt giebt mir den Inhalt des 2ten Dr. ABD; diesen Inhalt zähle ich zu dem Inhalte des 1sten Dr. ABC, so zeigt mir die Summe beider den Inhalt des ganzen Tr.

Lhr. Richtig! Eben so macht man es mit den Fünfecken, Sechsecken und mit allen geradlinig-begrenzten Figuren, man theilt sie nemlich durch Eck-L. in Dr., und berechnet jedes einzelne Dreieck.

Wir wollen nun einmal das Tr. hier (auf Fig. 59 zeigend) wirklich berechnen.

(indem er einen kleinen Stab, der in 12 gleiche Theile getheilt ist und gerade die Länge der L. BC hat, vorzeigt.)

Dies hier ist ein verjüngter Maaßstab, der die Länge von 12 Fuß vorstellt; wir wollen damit die S. und L. unserer Figur messen.

(den Maaßstab an S. BC anlegend.)

Wie viel beträgt also nach dem verjüngten Maaßstabe die Länge der S. BC? — Kdr. 12 Fuß.

Lhr. (den Maaßstab an L. AE anlegend.)

Wie groß ist L. AE? — Kdr. 6 Fuß lang.

Lhr. Was wird also der Inhalt des Dr. ABC seyn?

Kdr. Der Inhalt des Dr. ABC beträgt 36 Qu. F.; denn $\frac{12}{2}=6$; $6\times6=36$.

Lhr. Jetzt wollen wir S. AB messen. Wie viel beträgt ihr Maaß? — Kdr. 10 Fuß.

Lhr. Was muß ich jetzt noch messen?

Kdr. Die Höhe des 2ten Dr. ADB, also L. DF.

Lhr. (indem er sie mißt.) Ihre Länge beträgt 4 Fuß; was wird also der Inhalt des Dr. ABD seyn?

Kdr. Der Inhalt des Dr. ABD beträgt 20 Qu. F.; denn $\frac{10}{2}=5$; $5\times4=20$.

Lhr. Wie viel beträgt nunmehr der Inhalt des ganzen Tr.? — Kdr. 56 Qu. Fuß.

denn Dr. ABC = 36 Qu. Fuß,
und Dr. ABD = 20 Qu. Fuß,
$36+20=56$ Quadrat-Fuß.

XXIV. Stufe. Auffinden der Gleichheit zweier Dreiecke in Absicht auf ihren Inhalt.

84ste Aufg. In einem gegebenen Dr. ist aus dem Sch. P. des einen W. nach der gegenüberstehenden S. eine L. gezogen worden, welche diese S. in 2 gleiche Theile theilt; es frägt sich:

Ob die beiden dadurch entstandenen Dr., dem Inhalte nach, einander gleich sind?

Antw. Die beiden Dr. die ꝛc. sind, dem Inhalte nach, einander gleich.

Sollten die Kinder nicht von selbst auf den Beweis kommen, so verfahre der Lehrer wie folgt:

(indem er irgend ein Dr., z. B. Dr. ABC Fig. 60, an die Tafel zeichnet, und auf die Mitte der Grund-L. BC, aus A, die L. AD zieht, welche das Dr. ABC in die beiden Dr. ABD und ADC theilt.)

Was entsteht, wenn ich ein Pgr. durch eine Eck-L. theile?

Kdr. Wenn ich ein Pgr. ꝛc., so entstehen 2 Dr.

Lhr. Ich kann daher jedes Dr. als die Hälfte eines Pgr. anschauen. Thut das jetzt bei jedem dieser beiden Dr. (auf die Dr. ABD und ADC an der Wandtafel zeigend, die jedes Kind auf seiner Tafel nachgebildet haben muß, wie das bereits früher empfohlen worden ist.) Wie werden wir das anzufangen haben?

Kdr. Wir dürfen nur gll. mit der Grund-L. BC durch den Sch. P. des W. bei A, eine L. EF ziehen, und dann gll. mit der Theilungs-L. AD die L. EB und FC.

(indem es der Lehrer an der Wandtafel, die Kinder auf ihren Tafeln wirklich thun, s. Fig. 61.)

Lhr. Hier erscheint also Dr. ABD als die Hälfte des Pgr. AEBD, Dr. ADC als die Hälfte des Pgr. AFCD; aber was wollten wir eigentlich wissen?

Kdr. Ob die beiden Dr. ABD und ADC gleichen Inhalt haben?

Lhr. Wie werden wir das finden können?
Sind wohl die beiden Pgr. AEBD und AFDC gleich?

Kdr. Ja, sie sind gleich.

Lhr. Wie beweist ihr das?

Kdr. Beides sind Pgr., also sind in jedem die gll. S. unter sich gleich, folglich AD = EB; da nun AD auch gleich FC, so ist auch EB = FC; ferner ist, da BC bei D in zwei gleiche Theile getheilt worden ist, BD = CD; eben so AF = CD und AE = BD, mithin alle 4 S. des Pgr. AEBD gleich allen 4 S. des Pgr. AFDC, folglich die beiden Pgr. gleich.

Lhr. (sich an die andern Schüler wendend.) Ist das wohl richtig geschlossen?

Kdr. Nein; denn es können die 4 S. des einen Pgr. gleich seyn den 4 S. eines andern Pgr., ohne daß darum die

Pgr. selbst gleich sind, kommen sie unter verschiedenen W. zusammen, so sind sie ungleich.

Lhr. Was fehlt also noch?

Kdr. Die Gleichheit der W. in beiden Pgr. muß nachgewiesen werden.

Lhr. Richtig! Wird das möglich seyn, nachzuweisen?

Ein Kd. Das ist sehr leicht.

In dem Pgr. AFDC ist W. a=f; W. f ist = W. b + c in dem Pgr. AEDB, folglich sind bei beiden Pgr. in jedem ein W. und alle S. einander gleich, mithin die ganzen Pgr. einander gleich.

Lhr. Hieraus folgt also allgemein: Wenn ein Dr. durch eine L., die aus dem Sch. P. einer der W. auf die Mitte der gegenüberstehenden S. gezogen wird, in 2 Dr. getheilt wird, so haben diese Dr. gleichen Inhalt.

85ste Aufg. In einem ungleichseitigen Dr. ist aus einem der W. nach der gegenüberstehenden S. eine L. gezogen, die diesen W. in 2 gleiche Theile theilt, es frägt sich, ob die dadurch entstandenen Dr. gleichen Inhalt haben oder nicht?

(Die Kinder werden hier gewiß ohne Schwierigkeit finden, daß sie nicht von gleichem Inhalte sind; sollten sie indessen nicht darauf verfallen, so stehe ihnen der Lehrer bei.)

Lhr. Dr. ABC sey das gegebene Dr., L. AD theilt den W. bei A in 2 gleiche Theile (s. Fig. 62).

Kann ich nun wohl aus AC auf D eine L. so ziehen, daß sie mit S. AC einen W. bildet, der = W. a ist? — Kdr. Ja.

Lhr. Wie wollt ihr mir das beweisen?

Kdr. Ich kann die L. so ziehen, daß der eine der beiden N. W., die sie mit S. BC bildet, größer wird als W. a; denn an sich ist dieser W., der durch die L. AD und DC gebildet wird, größer als W. a, weil er A. W. an dem Dr. DBA, folglich so groß als a + c ist; ich kann sie auch so ziehen, daß der nemliche W. kleiner wird als W. a; folglich giebt es einen Fall, wo der W. = W. a wird.

Lhr. Also wollen wir jetzt wirklich die L. CD so ziehen, daß W. b=a wird. Werdet ihr jetzt vielleicht den Beweis führen können?

Kdr. O ja! W. b=a, W. c=d, also auch W. f=g; ferner S. AD beiden Dr. ABD und AED gemein, mithin beide Dr. gleich (wie auch schon oben bei der 70sten Aufgabe gezeigt worden ist). Nun ist aber das Dr. ADC um das Dr. DEC größer als das Dr. ADB; folglich theilt die L., welche den W. des Dr. in 2 gleiche Theile theilte, das Dr. selbst in 2, dem Inhalte nach, ungleiche Theile.

Lhr. Hieraus folgt nun allgemein:

Wenn in einem Dr. einer der W. durch eine L. in 2 gleiche Theile getheilt wird, und diese L. nicht auch zugleich die dem W. gegenüberstehende S. in 2 gleiche Theile theilt, so sind die dadurch entstandenen Dr., dem Inhalte nach, einander ungleich.

86ste Aufg. Es frägt sich: Ob die Dr., die dadurch entstehen, daß man in einem Pgr. mit 2 Paar S. von ungleicher Größe 2 Ecklinien zieht, einander gleich sind?

(ABCD sey das Pgr., s. Fig. 63.)

Der Lehrer kann, um die Kinder auf die Auflösung zu führen, falls sie nicht von selbst darauf verfallen sollten, auf folgende Art verfahren:

Lhr. Wir wollen zuerst die 2 Paar gegenüberstehenden Dr. vergleichen, z. B. Dr. ABE und CDE; sind beide einander gleich?

Kdr. Ja; denn die beiden W. a und b, die an S. AB liegen, sind = den beiden W. c und d, die an S. CD liegen, als W. W. bei gll. L. S. AB = S. CD, mithin in beiden Dr. eine S. und die beiden an derselben liegenden W. gleich, folglich die ganzen Dr. gleich.

Lhr. Wie steht es nun in Absicht der Gleichheit mit den beiden Dr. BDE und AEC?

Kdr. Sie sind einander gleich, aus denselben Gründen, wie die beiden andern Dr.

Lhr. Werden aber die neben einander liegenden Dr. einander gleich seyn? z. B. Dr. BDE und Dr. CDE?

Kdr. Nein, denn S. EB ist = S. EC, S. ED ist sich selbst gleich; allein S. BD ist ungleich CD, CD ist die kürzere, BD die längere S. des Pgr.

Lhr. Es frägt sich nun aber, ob sie dem Inhalte nach einander gleich seyn werden?

Kdr. Dem Inhalte nach sind sie einander gleich; denn in dem Dr. BDC ist S. BC durch L. DE bei E in 2 gleiche Theile getheilt, da BE = CE ist; ich kann also wieder beide Dr. als Hälften gleicher Pgr. anschauen, die mithin gleichen Inhalt haben (nach der 84sten Aufgabe).

Lhr. Hieraus folgt also allgemein:

Jedes Pgr. wird durch 2 Ecklinien in 4, dem Inhalte nach, gleiche Dreiecke getheilt.

87ste Aufg. In einem P. Tr. sind 2 Ecklinien gezogen; es frägt sich: Ob alle oder einige, und welche der dadurch entstandenen 4 Dreiecke einander in Ansehung des Inhalts gleich seyen?

Diese Aufgabe ist etwas schwer zu lösen, und wird daher der Lehrer in der Regel seinen Schülern zu Hülfe kommen müssen.

Lhr. Wir wollen jedes einzelne dieser 4 Dr. mit jedem der 3 übrigen vergleichen.

(Siehe Fig. 64 das P. Tr. ABCD, worin die beiden Ecklinien BC und AD gezogen sind.)

Zuerst wollen wir Dr. ABE mit Dr. ACE vergleichen.

Können wohl beide gleichen Inhalt haben?

(Die Kinder werden zwar gleich sehen, daß das nicht der Fall ist, aber wahrscheinlich es behaupten, ohne es beweisen zu können, dann fahre der Lehrer fort:)

Wir wollen aus B auf CD eine Hülfslinie BF gll. mit AC ziehen, so erhalten wir das Pgr. ABCF (s. Fig. 65).

Sodann erscheint BC als die eine Ecklinie; wir wollen nun eine zweite Ecklinie ziehen, L. AF; werdet ihr mir jetzt sagen können:

Ob Dr. ABE = Dr. ACE ist?

Kdr. Ja — jetzt können wir beweisen, daß beide Dr. ungleich sind; denn Dr. ABG ist = Dr. ACG, da beide durch die Ecklinie des Pgr. ABCF gebildet sind (s. die 73ste Aufg.). Nun ist aber Dr. ABE um das Dr. GEA kl. als Dr. ACG, also um 2 mal das Dr. GEA kl. als Dr. ACE, mithin ist der Inhalt beider Dr. ungleich.

Lhr. Jetzt wollen wir den Inhalt desselben Dr. ACE

mit dem Inhalte des Dr. CDE vergleichen. Wir wollen zu dem Ende die kürzere der beiden gll. S. des Pgr., S. AB, so weit verlängern, daß sie der längeren CD gleich wird, und sodann L. HD ziehen, so erhalten wir ein Pgr. AHCD, wovon AD die eine Ecklinie ist; wir wollen eine zweite Ecklinie HC ziehen (s. Fig. 66).

(Die Kinder werden hier sogleich finden, daß Dr. CDI, dem Inhalte nach, = Dr. ACI, mithin Dr. CDE um das Doppelte des Dr. EIC gr. ist als Dr. ACE; folglich beide Dr. ungleich, und zwar Dr. CDE das größere.)

Lhr. Werden die beiden Dr. CDE und ABE dem Inhalte nach gleich seyn?

Kdr. Nein, denn in beiden sind alle W. gleich; aber S. AB in Dr. ABE ist kleiner als die ähnlich liegende S. CD in Dr. CDE, also ist das Dr. ABE das kleinere, folglich beide ungleich.

Lhr. Jetzt wollen wir die Dr. ACE und BDE in Absicht auf den Inhalt vergleichen; zu dem Ende wollen wir wieder, wie vorhin, das P.Tr. zu einem Pgr. ergänzen, und gleichlaufend mit AC und HD L. BG ziehen (s. Fig. 67).

(Der Lehrer gebe den Kindern, wenn sie nicht sogleich selbst den Beweis finden sollten, einige Tage Zeit, um ihn zu suchen; sollten sie auch dann ihn nicht finden, so muß er sie freilich noch deutlicher darauf hinweisen, auf folgende Art:)

Lhr. Wir haben hier ein großes Pgr. AHCD, die Ecklinie AD theilt es in 2 gleiche Theile; was für ein Theil des Pgr. ist also Dr. CDA?

Kdr. CDA ist die Hälfte des Pgr. AHCD.

Lhr. Richtig. Dann haben wir 2 kleine Pgr., die zusammen dem großen Pgr. gleich sind; welche werden es seyn?

Kdr. Pgr. ABCG und BHGD.

Lhr. Pgr. ABCG wird durch Ecklinie BC in zwei gleiche Dr. getheilt; wie heißen sie? — Kdr. ABC und BGC.

Lhr. Mithin ist Dr. BGC die Hälfte des Pgr. ABCG; eben so ist Dr. BGD die Hälfte des Pgr. BHGD; was wird daraus folgen, wenn wir beide Dr. oder das ganze Dr. CDB mit dem großen Pgr. AHCD vergleichen?

Kdr. Dr. BCD ist die Hälfte des großen Pgr.

Lhr. War nicht auch Dr. ACD die Hälfte des großen Pgr.? — Kdr. Ja!

Lhr. Was folgt daraus?

Kdr. Dr. ACD = Dr. CDB.

Lhr. Aber kann dies wohl auf die beiden Dr. ACE und BDE Einfluß haben?

(Vielleicht finden es die Kinder auch jetzt noch nicht, dann werde der Lehrer nicht ungeduldig — er prüfe sich: Ob er selbst diesen Beweis ohne Hülfe gefunden hat? und fahre dann ruhig fort, indem er Dr. ABE doppelt, Dr. CED aber nur einfach schattirt, s. Fig. 68).

Dr. ABE gehört keinem der beiden Dr. an, und kommt hier nicht in Betracht; allein Dr. CDE gehört beiden Dr. an, sowohl CDB als ACD; beide waren gleich; ziehe ich Dr. CDE von jedem dieser Dr. ab, was habe ich dann gethan?

Kdr. Sie haben Gleiches von Gleichem abgezogen.

Lhr. Was bleibt übrig? — Kdr. Gleiches.

Lhr. Was folgt also daraus?

Kdr. Daß Dr. ACE = Dr. BDE seyn muß.

Lhr. So ist es auch und es folgt also allgemein:

Wenn in einem Parallel-Tr. 2 Ecklinien gezogen werden, so sind von den dadurch entstehenden Dr. diejenigen beiden Dr. von gleichem Inhalt, die zwischen den gll. S. liegen.

Der Lehrer kann auch so schließen lassen:

Wir haben hier Fig. 74, Taf. XV von B aus eine L. BF gll. mit AC gezogen; diese L. BF wird eben deshalb gleich AC seyn, denn sie ist eine Seite des Pgr. ABFC. Wenn ich nun den Inhalt des Dr. ACD berechnen will, so muß ich die Grund-L. CD mit der Höhe AC multipliciren, und davon die Hälfte nehmen. Will ich den Inhalt des Dr. CBD finden, so muß ich die Grund-L. CD mit BF multipliciren und davon die Hälfte nehmen. Weil nun BF = AC, so wird gleichviel herauskommen, und deshalb haben die beiden Dr. CAD und CBD gleichen Flächeninhalt. Nehme ich von beiden gleich viel weg, nemlich das Dr. CED, so muß auch gleich viel übrig bleiben, nemlich die Dr. AEC und BED, welche also gleich an Flächeninhalt sind. Nun ist AB gll. mit CD, daher

sind die beiden Dr. AEB und CED einander ähnlich. Weil aber CD größer als AB, so ist auch ED größer als AE, und CE größer als EB, folglich ist auch Dr. CAE oder BCD größer als Dr. AEB. (Denn gleich würden sie nur seyn, wenn der Punkt E, oder die L. AE auf die Hälfte der L. CB fiele.) Wenn ich nun EG so groß mache als AE, und ziehe von G eine L. GH gll. mit AB, so wird das Dr. HEG = dem Dr. AEB, folglich ist das Dr. CED um das Stück CHGD größer als das Dr. AEB.

XXIV. Stufe [b]). Bestimmung des Flächeninhalts zerschnittener Dreiecke zu deren einzelnen Stücken.

88ste Aufg. In dem Dr. Taf. XIV, Fig. 47 abc ist die S. ac in drei gleiche Theile getheilt. Ist durch die gezogenen L. bd, be der Flächeninhalt des ganzen Dr. in 3 gl. Theile getheilt?

Kdr. Ja! Wir nehmen zuerst das Dr. abe; in diesem ist ad = ½ ae, daher ist auch das Dr. abd = Dr. bde, wie wir schon früher bewiesen haben. Nehmen wir nun das Dr. bdc, so ist wieder de = ½ dc, folglich Dr. dbe = Dr. ebc; es ist also Dr. ebc und Dr. abd = Dr. dbe, daher sind alle 3 Dr. einander gleich, oder jedes ist der dritte Theil vom ganzen Dr. abc.

Lhr. Gut. Ob wohl auch jedes Dr. ¼ vom ganzen Dr. abc seyn wird, wenn ich die S. ac in 4 gl. Theile theile, und dann von b aus die Linien ziehe?

Kdr. Ja. Das läßt sich eben so beweisen.

Lhr. Daraus folgt also, daß, wenn ich in einem Dr. die eine S. theile, und von dem gegenüberstehenden W. nach den Theilungspunkten L. ziehe, das Dr., dem Raume nach, in eben solche und eben so viele Theile getheilt ist, als die L.

Lhr. (zeichnet das Dr. Fig. 48.) Wie verhalten sich die Dr. abd und dbc zu einander?

Kdr. Es fehlt noch die Zahl.

Lhr. Wir wollen es einmal ohne Zahl angeben. Kann ich das Verhältniß nicht auch durch eine L. angeben?

Kdr. Ja!

Lhr. Sind denn nun hier nicht L., die in eben dem Verhältnisse stehen, als der Flächenraum der Dr.?

Kdr. Ja, die L. ad und dc.

Lhr. Nun, wie verhalten sich denn die Dr. abd und bdc dem Raume nach zu einander? — Kdr. Wie ad zu dc.

Lhr. Gut. Das ist jedesmal der Fall, wenn ich von einem W. nach einer S. Linien ziehe. Wer kann mir aber folgende Aufgabe lösen? (er zeichnet Fig. 49 an die Tafel.) Ich ziehe hier eine L. de von Seite auf Seite. Das Stück ad ist $= \frac{1}{3}$ ab und be $= \frac{1}{2}$ bc. Wie verhalten sich nun die beiden Stücke des Dr. zum ganzen Dr., oder auch zu einander?

(Die Kinder werden vielleicht von d aus eine gll. L. mit ac ziehen. Obgleich die Aufgabe sich dadurch lösen läßt, so ist die Auflösung doch schwerer, als wenn sie von a nach e oder von d nach c eine L. ziehen. Der Lehrer komme ihnen also dabei zu Hülfe.)

Lhr. Ich ziehe eine Hlfl. von a nach e, wieviel ist aec vom ganzen Dr.? — Kdr. Die Hälfte.

Lhr. Warum? — Kdr. Weil ec die Hälfte von bc ist.

Lhr. Darum ist das Dr. bae auch die Hälfte von abc. Jetzt wollen wir uns nun das Dr. aec ganz wegdenken. Dann bleibt uns das Dr. bae übrig. In diesem ist nun die L. de aus dem W. bea gezogen. Der wie vielte Theil ist nun wohl das Dr. bed vom Dr. bae?

Kdr. Es ist $\frac{2}{3}$ von bae, denn die L. bd ist $\frac{2}{3}$ von ba.

Lhr. Gut. Das Dr. bed ist also $\frac{2}{3}$ des Dr. bae. Das Dr. bae ist aber der wie vielte Theil vom ganzen Dr.?

Kdr. Die Hälfte.

Lhr. Wiederholt es jetzt einmal!

Kdr. Das Dr. bde ist $\frac{2}{3}$ vom Dr. bae; das Dr. bae ist die Hälfte des ganzen Dr.; also ist das Dr. bde $= \frac{2}{3}$ von der Hälfte des Dr. abc, oder $\frac{1}{3}$ des ganzen Dr.

Lhr. Wie groß ist dann noch das andere Stück dace?

Kdr. $\frac{2}{3}$ von abc.

Anmerk. Der Lehrer muß noch mehrere solche Aufgaben geben,

bis sie die Kinder fertig und mit Bewußtseyn lösen. Sehr bald werden die Kinder merken, daß man nichts weiter nöthig hat, und wenn man die Aufgaben auf die angegebene Weise löset, auch nichts weiter thut, als die beiden Stücke bd und be (welche mit der gezogenen L. de das Dr. bilden) mit einander zu multipliciren. Dann kann der Lehrer die folgenden Aufgaben geben, von denen hier, des beschränkten Raumes wegen, die Auflösungen nur kurz angegeben werden können.

89ste Aufg. Wie verhalten sich in Fig. 25, Tafel XIII die Stücke, wenn die L. ad und be auf die Hälften der Seiten bc und ac gezogen sind?

Auflös. Man bestimme erst eine L., wie sie zerschnitten worden; mehr als eine ist nicht nöthig. Es findet sich dadurch, daß $fd = \frac{1}{3}$ ad. — Das Dr. $abd = \frac{1}{2}$ abc; Dr. $bfd = \frac{1}{3}abd = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, das Dr. $abc = \frac{1}{6}$ des Ganzen; daher Dr. $bfa = \frac{2}{6}$ des Ganzen. Weil nun abe auch $= \frac{1}{2}$ des Dr. abc, so bleibt für Dr. afe ebenfalls nur $\frac{1}{6}$, und also für efdc $= \frac{2}{6}$ des Ganzen.

Fig. 26. Hier ist $fd = \frac{1}{2}$; Δ bad $= \frac{1}{3}$ Δ abc; daher Δ bfd $= \frac{1}{2}$ Δ abd $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ Δ abc $= \frac{1}{2}$ Δ abe. Folglich ist auch Δ abf $= \frac{1}{6}$ Δ abc. Nun ist aber Δ abe $= \frac{1}{4}$ Δ abc; weil nun abf $= \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$, so bleibt für afe noch $\frac{1}{12}$ des Ganzen übrig, und weil Δ dac $= \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, so bleibt für efdc noch $\frac{7}{12}$ des Ganzen.

Fig. 27. Hier findet sich $bf = \frac{2}{5}$ be. Es ist also Δ bfa $= \frac{2}{5}$ des Δ bae. Dieses ist aber $= \frac{3}{4}$ des Ganzen, daher Δ baf $= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ des Ganzen, und Δ afe $= \frac{9}{20}$ des Ganzen. Weil aber Δ abd $= \frac{1}{3}$ des Ganzen $= \frac{20}{60}$, das Δ bfa aber $= \frac{6}{20} = \frac{18}{60}$, so bleibt für Δ bfd noch $\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ des Ganzen. Δ ebc aber $= \frac{1}{4} = \frac{15}{60}$; weil nun Δ bfd $= \frac{2}{60}$, so ist efdc $= \frac{13}{60}$ des Ganzen.

Fig. 28. Es findet sich hier $dg = \frac{1}{2}$ da. Wir nehmen zuerst das Dr. adc, welches $= \frac{2}{3}$ des Ganzen. Darin ist de $= \frac{1}{2}$ dc. In dem Dr. adc ist die L. ge aus keinem W. gezogen. Man findet das Stück gdo aber, wenn man gd mit de vervielfältigt. Es ist also Δ gde $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ Δ adc $= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ Δ abc $= \frac{2}{12}$ des Ganzen; ageo also noch $= \frac{6}{12}$

$= \frac{4}{12}$ des Ganzen. Ferner ist Δ fbe $= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ des Ganzen. Weil aber dge $= \frac{2}{12} = \frac{6}{36}$ ist, fbe aber $\frac{16}{36}$, so bleiben für bdgf noch $\frac{10}{36}$ des Ganzen, und weil Δ bda $= \frac{1}{3} = \frac{12}{36}$, für Δ fag noch $\frac{2}{36}$ des Ganzen.

Fig. 29. Hier findet sich eg $= \frac{15}{19}$ ef. Das Δ fce $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ Δ abc; ed $= \frac{5}{9}$ ec, daher Δ egd $= \frac{5}{9} \times \frac{15}{19}$ Δ efc, $= \frac{25}{57}$ Δ efc $= \frac{25}{57} \times \frac{1}{2}$ Δ abc $= \frac{25}{114}$ Δ abc. — Weil nun Δ efc $= \frac{57}{114}$, so ist fgdc $= \frac{32}{114}$ Δ abc. Das Δ dbc aber $= \frac{1}{3}$ Δ abc $= \frac{38}{114}$ Δ abc; daher ist Δ gbf $= \frac{6}{114}$ Δ abc; Δ abd $= \frac{2}{3} = \frac{76}{114}$ Δ abc; und weil Δ egd $= \frac{25}{114}$ Δ abc, so ist bgea noch $\frac{51}{114}$ Δ abc.

Fig. 30. Es findet sich gf $= \frac{4}{13}$ ef, daher Δ gbf $= \frac{4}{13}$ Δ ebf. Letzteres aber ist $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ Δ abc, also Δ gbf $= \frac{4}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{13}$ Δ abc, und daher Δ egb $= \frac{9}{52}$ (nemlich $\frac{1}{4} - \frac{1}{13}$); daraus findet sich aegd $= \frac{17}{52}$ Δ abc und dgfc $= \frac{22}{52}$ Δ abc.

Fig. 31. Hier ist gf $= \frac{5}{9}$ ef und Δ gfh $= \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$ Δ efb; letzteres aber ist $= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ Δ abc; daher Δ gfh $= \frac{25}{81} \times \frac{9}{16}$ Δ abc $= \frac{35}{144}$ Δ abc. Das Δ ebf $= \frac{81}{144}$, daher eghb $= \frac{25}{144}$ Δ abc. Das Δ dhc $= \frac{4}{9} = \frac{64}{144}$ Δ abc; folglich bleibt für dgfc noch $\frac{39}{144}$ des Ganzen, und für aegd $\frac{24}{144} = \frac{1}{6}$ des Ganzen.

Fig. 32. Es findet sich auf eine ganz gleiche Weise Δ gfh $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ Δ dhc, und letzteres $= \frac{1}{2}$, daher Δ gfh $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ des Ganzen; folglich dgfc $= \frac{3}{8}$ des Ganzen, eghb $= \frac{4}{9} - \frac{1}{8} = \frac{23}{72}$ Δ abc und egda $= \frac{13}{72}$ Δ abc.

Fig. 33. Weil dg $= \frac{1}{2}$ dh, so ist Δ edg $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ Δ bdh $= \frac{1}{6} \times \frac{3}{16}$ Δ abc $= \frac{1}{32}$ Δ abc. Daher eghb $= \frac{5}{32}$ Δ abc, und weil Δ ebf $= \frac{1}{4} = \frac{8}{32}$ Δ abc, das Δ ghf $= \frac{3}{32}$ Δ abc, und adgfc $= \frac{23}{32}$ des Ganzen.

Fig. 34. Hier findet sich eg $= \frac{15}{19}$ ef, daher Δ deg $= \frac{15}{19} \times \frac{5}{9} = \frac{75}{171}$ Δ fec $= \frac{75}{171} \times \frac{3}{8}$ Δ abc $= \frac{75}{456}$ Δ abc; daher bleibt für dgfc $\frac{96}{456}$ Δ abc. Weil aber Δ dhc $= \frac{1}{4}$ Δ abc, so ist Δ ghf $= \frac{18}{456}$ Δ abc, und bhkea $= \frac{267}{456}$ des Ganzen.

Fig. 35. Hier ist eg $= \frac{20}{33}$, daher Δ heg $= \frac{20}{33} \times \frac{2}{3} = \frac{40}{99}$ Δ bef $= \frac{40}{99} \times \frac{9}{20} = \frac{2}{11}$ Δ abc. Weil nun Δ had $= \frac{1}{2}$, so bleibt für egda $\frac{7}{22}$ Δ abc. Ferner ist hbfg $=$

$\frac{59}{220}$ Δ abc (nemlich $\frac{9}{20} - \frac{2}{11}$), und gfcd $= \frac{51}{220}$ Δ abc (oder $\frac{1}{2} - \frac{59}{220}$).

XXIV. Stufe °). Verlängerungen bei den Dreiecken und Bestimmung des Flächeninhalts der dadurch gebildeten Figuren.

90ste Aufg. Lhr. (Zeichnet Fig. 36, Taf. XIII an die Tafel.) Ich habe hier die L. de, welche von $\frac{1}{2}$ ab auf $\frac{1}{3}$ bc gezogen worden, verlängert, und verlängere auch die L. ac bis beide sich in f schneiden. Was ist für eine Figur entstanden? — Kdr. Ein Viereck mit einem äußern W.

Lhr. Richtig; es ist aber in drei Stücke zerschnitten. Wir wollen nun einmal suchen, wie sich der Flächenraum jedes Stücks zu dem der ganzen Figur verhält. Bestimmt zuerst, wie die L. df und af geschnitten sind.

Kdr. (nachdem sie es gethan) cf ist $= \frac{1}{3}$ af, und ef $= \frac{2}{3}$ df.

Lhr. Gut. Der wie vielte Theil mag wohl das Dr. cef vom Dr. dfa seyn? Wie werdet ihr das finden?

Kdr. Weil die L. ce in dem Dr. dfe aus keinem W. gezogen worden, so muß ef mit cf vervielfältigt werden.

Lhr. Wer kann mir den Grund dieses Verfahrens angeben? (Die Kinder beweisen es wie in der 88sten Aufgabe.)

Lhr. Gut. Jetzt wollen wir nun rechnen.

Kdr. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Daher ist das Dr. cfe $= \frac{1}{3}$ vom Dr. dfa.

Lhr. Wüßten wir nun, der wie vielte Theil das Dr. dfa von der ganzen Figur wäre, so könnten wir leicht finden, der wie vielte Theil das Dr. cfe vom Ganzen wäre. Der wie vielte wäre es dann?

Kdr. Der dritte Theil von dem, was Dr. dfa vom Ganzen wäre.

Lhr. Könnt ihr nun wohl finden, der wie vielte Theil vom Ganzen Dr. dfa ist?

Die Kinder werden wohl vergeblich suchen. Wenn sie gestanden, es nicht finden zu können, fahre der Lehrer fort.

Lhr. Wenn Dr. efc $\frac{1}{3}$ vom Dr. dfa, dann hat efc einen solchen Theil als deca? —

Kdr. Noch zwei Theile hat; denn Tr. deca $= \frac{2}{3}$ von dfa.

Lhr. Schreibt das einmal vorläufig hin, die 1 in das Dr., die 2 in das Trapez. Wenn wir nun noch finden könnten, wie sich Dr. dbe zu Tr. deca verhält, so hätten wir es. Wir wollen jetzt einmal Dr. abc nehmen. Der wie vielte Theil ist Dr. dbe von Dr. abc?

Kdr. be ist $\frac{2}{3}$ von bc und bd ist $\frac{1}{2}$ von ab; daher ist Dr. bde $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ des Dr. abc.

Lhr. Oder Dr. dbe hat einen solchen Theil, wie Trapez dcae zwei. Wer kann weiter rechnen?

Kdr. Daher ist Dr. dbe = Dr. efc; denn jedes ist halb so groß als das Tr. deca, oder jedes ist $\frac{1}{4}$ von der ganzen Figur, und das Trapez deca die Hälfte.

(Der Lehrer gebe mehrere Aufgaben dieser Art, die die Kinder wohl finden werden, da die Berechnung stets auf die gleiche Weise geführt werden kann. Erst dann gehe er zur folgenden Aufgabe über.)

91ste Aufg. Fig: 37. Es soll in dem Siebenecke mit drei A. W. das Flächenverhältniß der einzelnen Stücke zu dem des Ganzen berechnet werden. (Auf welche Theile der Seiten des Dr. abc L. gezogen worden sind, ist in der Figur angegeben.)

Auflös. Man bestimme zuerst das Verhältniß der zerschnittenen L. Es findet sich sodann, daß $gc = \frac{2}{3}$ gb, ge $= \frac{3}{4}$ gd, ch $= \frac{1}{2}$ ah und fh $= \frac{3}{4}$ hd ist.

Nun ist Δ dbf $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ Δ acb, oder Δ dbf hat 1 wie Δ abc 6, wie dfac 5 Theile.

Dr. chf $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ Δ ahd, oder Δ chf hat 3 wie Δ ahd 8; wie Tr. dfac 5 Theile.

Nun hat Δ dbf 1, und Δ chf 3 solche Theile als Tr. dfac 5.

Daher hat Δ chf 3 solche Theile als das Dr. acb 6, oder das Dr. chf ist halb so groß als das Dr. acb.

Ferner ist Δ aed $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ Δ acb, oder Δ aed hat 1 wie acb 2 wie Tr. decb 1 Theil.

Δ egc $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ Δ dgb, oder Δ egc hat 1 wie dgb 2, wie Tr. decb 1 Theil.

Nun ist Δ aed eben so groß als Tr. decb, und Δ egc ebenfalls.

Folglich ist Δ egc eben so groß als Δ chf und jedes halb so groß als Δ acb, oder Δ egc = $\frac{1}{4}$ des Ganzen; Δ chf eben so viel und Δ acb = $\frac{1}{2}$ des Ganzen.

Nun ist Δ dbf = $\frac{1}{6}$ Δ acb; folglich ist Δ dbf = $\frac{1}{6}$ × $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{12}$ des Ganzen.

Ferner ist Δ ead = $\frac{1}{2}$ Δ acb; also = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{4}$ des Ganzen.

Man findet nun Tr. edfc = $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ des Ganzen.

XXV. Stufe. Vergleichung des Inhalts der Dreiecke, Parallelogramme und Trapeze.

92ste Aufg. Man soll aus irgend einem W., den 2 S. eines Pgr. bilden, durch die Mitte der dem W. gegenüberstehenden S. eine L. ziehen, sodann die 4te S. des Pgr. bis dahin verlängern, wo sie jene L. schneidet. Es frägt sich:

1) ob die beiden dadurch entstandenen kleinen Dr. einander gleich sind?
2) ob das große Dr. mit dem Pgr. gleichen Inhalt hat?

Wahrscheinlich werden die Kinder hier Antwort und Beweis ohne Beihülfe finden; sollte es aber der Fall nicht seyn, so hat der Lehrer auf folgende Art zu verfahren:

(auf Figur 69 zeigend) Pgr. **ABCD** sey das Pgr.; L. **DE** sey auf die angegebene Art gezogen — was wissen wir von dieser S. hier? (auf S. **AC** zeigend.)

Kdr. S. **AC** ist durch L. **BE** in **F** gleich getheilt.

Lhr. Jetzt vergleicht die beiden Dr. **CEF** und **ABF**.

Kdr. Beide sind gleich; denn W. a = d, als W.W. bei gll. L.; W. b = c aus gleichem Grunde; m = n als Sch. W., S. **AF** = **CF**; also in jedem Dr. alle W. und eine S. gleich; folglich sind die ganzen Dr. einander gleich. Mithin haben beide auch gleichen Inhalt.

Lhr. Aber wie wird sich nun Dr. **EBD** zu dem Pgr. in Rücksicht des Inhalts verhalten?

Kdr. Beide werden gleichen Inhalt haben; denn Tr.

CDFB ist sich selbst gleich; Dr. ABF = Dr. ECF; Gleiches zu Gleichem hinzugethan, giebt Gleiches; mithin sind Pgr. ABCD und Dr. EBD von gleichem Inhalte.

93ste Aufg. Es frägt sich: Ob zwei Pgr., die zwischen 2 gll. L. liegen und eine gemeinschaftliche, in einer dieser L. liegende gleiche S. haben, dem Inhalte nach einander gl. sind.

Lhr. (auf Fig. 70 zeigend). Die L. AB und ED sind gll.; S. EF = CD.

Wer weiß mir jetzt die Frage zu beantworten?

(Wenn keiner den Beweis finden sollte, den zu suchen der Lehrer den Kindern etwas Zeit lassen muß, so fahre der Lehrer fort, auf Fig. 70 zeigend:)

Wir haben hier 2 große Dr., ACE und BDF; sind diese Dr. wohl gleich?

Kdr. Sie sind gleich; denn W. b = a, als W.W. bei gll. L., W. c = d als äußerer G.W., also auch W. m = o; S. AE = BF, folglich, da 3 W. und 1 S. gleich sind, die ganzen Dr. einander gleich.

Lhr. Wer weiß mir die Gleichheit dieser beiden Dr. auf eine andere Art zu beweisen?

Ein anderes Kd. S. AE = BF; AC = BD; EF = CD; FC sich selbst gleich, also auch EC = DF; folglich alle 3 S. gleich, mithin die ganzen Dr. gleich, und gleichen Inhalts.

Lhr. Jetzt haben wir die Gleichheit der beiden Dr. ACE und BDF bewiesen, allein das ist noch nicht hinreichend; kann mir jetzt einer von euch die Gleichheit des Inhalts der beiden Pgr. beweisen?

(Wenn sich Niemand dazu finden sollte, fahre der Lehrer fort:)

Gehört das kleine Dr. FCG einem jeden der beiden Dr. an?

Kdr. Ja, es gehört den beiden Dr. gemeinschaftlich.

Lhr. Wenn ich nun das nemliche Dr. von jedem der beiden Dr. abziehe, was bleibt dann übrig?

Kdr. Dann bleiben die beiden Tr. AGEF und BDCG übrig.

Lhr. Sind beide gleich?

Kdr. Ja, denn Sie haben, indem Sie das kleine Dr.

FCG von beiden Dr. ACE und BDF abzogen, Gleiches von Gleichem abgezogen, und da bleibt Gleiches übrig.

Lhr. Wenn ich nun zu dem Tr. AEFG das Dr. ABG hinzuthue, und zu dem Tr. CDBG das nemliche Dr., was habe ich sodann gethan?

Kdr. Dann haben Sie Gleiches zu Gleichem hinzugethan, und das giebt Gleiches; folglich ist Tr. AEFG + Dr. ABG oder Pgr. ABEF = Tr. CDBG + Dr. ABG oder = Pgr. ABCD.

Lhr. Richtig! Hieraus folgt allgemein:

Wenn 2 Pgr. gleiche Höhe, und wenn beide eine gemeinschaftliche S. haben, welche in eine der gll. L. fällt, so haben die beiden Pgr. gleichen Inhalt.

(Es wird gut seyn, das beiden großen Dr. gemeinschaftlich angehörende Dr. FCG zu schattiren, das beiden Pgr. angehörende Dr. ABG ebenfalls, jedoch schwächer oder stärker als das erstere, wie Fig. 70 zeigt.)

94ste Aufg. Es frägt sich: Ob 2 Pgr. zwischen gll. L., deren in diesen L. liegende S. einander gleich sind, gleichen Inhalt haben?

Lhr. (auf Fig. 71 zeigend.) Hier sind die beiden Pgr. zwischen den gll. L. MB und LD, werden sie gleichen Inhalt haben?

Wer das glauben sollte, der führe den Beweis.

Ein Kd. Sie haben gleichen Inhalt; ich will es sogleich beweisen.

In den beiden P. Tr. AGIC und EHKF ist S. AE = GH; also, da EG sich selbst gleich, auch AG = EH; eben so CI = FK, GI = HK, AC = EF, folglich alle 4 S. gleich, folglich beide P. Tr. einander gleich und von gleichem Inhalte; ziehe ich nun von jedem das P. Tr. EGIF ab, so habe ich Gleiches von Gleichem abgezogen, und es bleibt Gleiches übrig, folglich Pgr. AEFC = Pgr. GHKI.

Lhr. Der Beweis läßt sich hören; es giebt indeß noch einen andern Beweis.

(Indem er in derselben Fig. die H. L. GC und FH zieht, s. Fig. 72.)

Durch Hülfe des Beweises bei der vorhergehenden Aufgabe

wird nemlich bewiesen, daß Pgr. AECF und Pgr. CHGF gleichen Inhalt haben; eben so Pgr. GHCF und Pgr. GHIK; folglich auch Pgr. AECF und Pgr. GHIK.

95ste Aufg. Sind auch wohl 2 Dr. dem Flächenraume nach gleich, wenn sie beide gleiche Höhe und eine gleiche Grund-Linie haben?

Kdr. Ja; denn jedes Dr. ist die Hälfte eines Pgr., diese Pgr. werden nun auch gl. Höhe und eine gl. S. haben, und darum haben sie gl. Inhalt. Was aber von dem Ganzen gilt, gilt auch von ihren Hälften.

Lhr. Richtig! Also auch Dr. haben gleichen Inhalt, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe haben.

XXV. Stufe b). Berechnungen des Flächeninhalts zerschnittener Parallelogramme.

96ste Aufg. Lhr. Daß ein Pgr., z. B. ein Quadrat, durch eine Ecklinie in 2 gleiche Stücke zerschnitten wird, haben wir bereits gefunden. Wie hat man es aber anzufangen, um den Flächeninhalt der beiden Stücke zu finden, in welche das Qu. abcd (er zeichnet Fig. 50, Tafel XIV) durch die L. ae, welche $\frac{1}{2}$ cd fällt, zerschnitten wird.

Sollten es die Kinder nicht finden, so fahre der Lehrer fort: Zieht einmal die Ecklinie ac.

Kdr. Nun ist Dr. dae $=\frac{1}{2}$ des Dr. aed; Dr. acd aber ist die Hälfte des Qu., folglich ist Dr. dae $=\frac{1}{2}$ von der Hälfte des Qu., oder $\frac{1}{4}$ des Qu. und baec $=\frac{3}{4}$ des Ganzen.

97ste Aufg. Es soll der Flächeninhalt der Stücke in der 51sten Fig. bestimmt werden.

Kdr. Wird die L. bc gezogen, so ist das Dr. cab die Hälfte des Qu. Dr. eaf aber $=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ des Dr. cab, also der dritte Theil der Hälfte des Qu., oder $\frac{1}{6}$ desselben.

(Es findet sich demnach das Dr. jedesmal, wenn man dessen Seiten, die den r. W. einschließen, multiplicirt, und dann die Hälfte nimmt.)

98ste Aufg. Wenn in einem Qu. Fig. 52 eine Linie von $\frac{1}{4}$ der einen S. nach der Hälfte der gegenüberliegenden

gezogen wird, wie verhalten sich die dadurch entstandenen Stücke zum ganzen Qu.?

(Die Aufgabe läßt sich auch durch L. lösen, welche mit den S. der Figur gll. sind, doch leichter so, wie in der Figur angegeben.)

Lhr. Was für einen Th. vom Qu. beträgt das Dr. ecb?

Kdr. Wenn von a nach c eine L. ginge, so würde Dr. ecb $= \frac{1}{4}$ des Dr. abc seyn. Vom Ganzen ist es $\frac{1}{8}$.

Lhr. Und das Dr. fec?

Kdr. (werden dies vielleicht nicht gleich finden.)

Lhr. Wenn ich von f nach b eine H. L. ziehe, wie viel wäre dann das Dr. fbc?

Kdr. Ein Viertel des Qu.

Lhr. Vielleicht ist Dr. fec so groß als das Dr. fbc?

Kdr. Ja, denn beide Dr. haben dieselbe Grundl. und gleiche Höhe.

Lhr. Gut. Wie viel beträgt also das Stück ebcf?

Kdr. $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ des Qu., oder $\frac{3}{8}$ desselben, und adfe $\frac{5}{8}$.

Der Lehrer setze diese Uebungen fort. Sehr bald wird das Kind inne werden, daß es nichts weiter thut, als daß es die beiden gll. Stücke der L. addirt und die Summe halbirt, um den Flächeninhalt zu finden.

99ste Aufg. Es soll der Flächenraum der Stücke in den Qu. der Figuren 39—45 im Verhältniß zum ganzen Qu. bestimmt werden.

Auflös. Figur 39. Man bestimme erst wieder eine L. (beide sind nie nöthig). Nun ist ag $= \frac{1}{2}$ ad, daher Δ gae $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ Δ abd $= \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ $\square$ abdc, folglich ist gebd $= \frac{5}{16}$ des Ganzen, und weil ebdf $= \frac{1}{2}$ des Qu. (oder auch weil Δ fgd $= \Delta$ ega), Δ fgd $= \frac{3}{16}$ und agfc $= \frac{5}{16}$ des Ganzen.

Fig. 40. Hier ist gh $= \frac{6}{11}$ hk. Man ziehe eine H. L. von b nach k, dann wird das Δ bkd $= \frac{1}{8}$ des Ganzen. Es ist aber hbdk $= \frac{1}{2}$ des Qu., folglich das Δ bkh noch $\frac{3}{8}$ des Ganzen. Von diesem Dr. ist das Δ ghe $= \frac{6}{11} \times \frac{2}{3}$ (denn he $= \frac{2}{3}$ hb) $= \frac{4}{11}$, folglich Δ ghe $= \frac{4}{11} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{22}$ des Ganzen; daher bleibt für kebd noch $\frac{8}{22}$. — Nun ist aber aefc $= \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ des Qu.; daher ahgfc $= \frac{13}{24} - \frac{3}{22} =$

$\frac{143}{264} - \frac{36}{264} = \frac{107}{264}$ des Ganzen, und weil ahkc $= \frac{1}{2} = \frac{132}{264}$, so ist fgk $= \frac{25}{264}$ des Qu.

Figur 41. Hier findet sich eg $= \frac{9}{17}$ ef. Es ist aber Δ ebf $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ der Hälfte $= \frac{1}{4}$ des Ganzen, also Δ ebg $= \frac{9}{17} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{68}$, und gbf $= \frac{8}{17} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{68}$ des Ganzen. Weil nun Dr. abc = Dr. bdc $= \frac{1}{2} = \frac{34}{68}$ des Ganzen, so ist aegc $= \frac{34}{68} - \frac{9}{68} = \frac{25}{68}$ und cgfd $= \frac{26}{68}$ des Ganzen.

Fig. 42. Hier ist eg $= \frac{7}{12}$ ef. Man ziehe (Fig. 53, Taf. XIV) die beiden H. L. eh und hf. — Das Pgr. aefb $= \frac{1}{3}$ des Ganzen. Δ eah $= \frac{1}{8}$ und Δ hfb $= \frac{1}{24}$ des Ganzen. Wird vom Pgr. aefb das Dr eha und Dr. hfb abgezogen, so bleibt Dr. ehf übrig. Dieses ist also $= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{8}{24} - \frac{4}{24} = \frac{4}{24}$ oder $\frac{1}{6}$ des Ganzen. Δ ehg $= \frac{7}{12}$ Δ ehf $= \frac{7}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{72}$ des Qu. — Dazu Δ eha $= \frac{9}{72}$ gerechnet, giebt für ahge $\frac{16}{72}$ oder $\frac{2}{9}$ des Ganzen. Für ghbf bleibt also noch $\frac{1}{9}$ des Qu., und weil hbdk $= \frac{1}{2}$, so ist kgfd $= \frac{7}{18}$ und egkc $= \frac{5}{18}$ des Ganzen.

Fig. 43. Es ist hier eg $= \frac{3}{13}$ ef; Dr. ebf $= \frac{1}{4}$ des Qu. und Dr. geh $= \frac{1}{3} \times \frac{3}{13} = \frac{1}{13}$ Δ ebf $= \frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$ des Ganzen. Für hbfg bleiben also noch $\frac{12}{52}$ wie für aegc, weil Dr. ach auch $= \frac{1}{4}$. Daher für cgfd $\frac{3}{4} - \frac{12}{52} = \frac{27}{52}$ des Ganzen.

Fig. 44. Hier ist eg $= \frac{6}{13}$ ef und Dr. ebf $= \frac{1}{4}$ des Ganzen. Dr. geh $= \frac{2}{3} \times \frac{6}{13} = \frac{4}{13}$ Dr. ebf $= \frac{4}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{13}$ des Ganzen. Daher ghbf $= \frac{1}{4} - \frac{1}{13} = \frac{9}{52}$, und weil hbdm $= \frac{1}{2}$, so ist mgfd $= \frac{17}{52}$ und egmca $= \frac{22}{52}$ des Ganzen.

Fig. 45. Hier findet sich eg $= \frac{7}{13}$ ef. Man ziehe (Fig. 54, Taf. XIV) die H. L. eh und hf. Nun ist abfe $= \frac{5}{12}$ des Ganzen. Dr. ahe $= \frac{1}{8}$ und Dr. hfb $= \frac{1}{16}$ des Ganzen. Nimmt man diese beiden Dr. von abfe weg, so bleibt Dr. ehf übrig. Dieses ist also $= \frac{5}{12} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{12} - \frac{3}{16} = \frac{11}{48}$ des Ganzen. Es ist aber Dr. ehg $= \frac{6}{13}$ Δ ehf $= \frac{6}{13} \times \frac{11}{48}$ $= \frac{11}{104}$ des Qu. — Hierzu Dr. ahe $= \frac{1}{8} = \frac{13}{104}$ gerechnet, giebt für ghbf $(\frac{5}{12} - \frac{3}{13}) = \frac{29}{156}$ des Qu., und weil bhkd $= \frac{1}{2} = \frac{78}{156}$ für kgfd $\frac{49}{156}$, für egkc aber $\frac{42}{156}$ des Ganzen.

Auch die Verlängerungen der Seiten und gezogenen Linien in den Quadraten, wodurch Vielecke mit äußeren W. entstehen, lassen sich dem Flächenraume nach bestimmen. Es mag jedoch hier nur die Berechnung der 46sten Figur stehen.

100ste Aufg. Es sollen die einzelnen Stücke des Fünfecks mit einem A. W. Fig. 46 berechnet werden.

Auflös. Man bestimme zuerst das Verhältniß der L. Es findet sich nun fb $= \frac{4}{9}$ fd und eben so fg $= \frac{4}{9}$ fe. Daher ist Dr. gfb $= \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$ des Dr. efd, oder Dr. gfb hat 16 solche Theile wie Dr. efd 81, folglich wie Tr. egbd 81 $-$ 16 $=$ 65 Theile. Es ist aber Tr. egbd $= \frac{13}{24}$ des Qu. abdc, oder egbd hat 13 solche Theile wie abdc 24 oder wie agec 11. Anstatt zu sagen: egbd hat 13 wie agec 11, kann man auch sagen: egbd hat 65 wie agec 55, indem beide Zahlen mit 5 multipl. sind. Nun hat gfb 16 Theile wie egbd 65 wie agec 55, das sind zusammen 136 Theile. Also hat Dr. gfb $\frac{16}{136} = \frac{2}{17}$ des Ganzen; egbd hat $\frac{65}{136}$ und agec $\frac{55}{136}$ des Fünfecks.

XXVI. Stufe. Verwandlung gegebener Figuren in Figuren anderer Art, aber gleichen Inhalts.

101ste Aufg. Wie hat man es anzufangen, um ein Pgr. in ein Dr. gleichen Inhalts zu verwandeln?

(Sollten die Kinder diese Frage nicht zu beantworten wissen, so erinnere sie der Lehrer nur an die 92ste Aufg., da sie dann die folgende Auflösung von selbst finden werden.)

Pgr. ABCD, Fig. 73, sey das Pgr. Ich ziehe aus einem der W. desselben, z. B. aus dem W. bei A durch E, die Mitte der S. BD, eine L. bis dahin, wo sie mit der Verlängerung der S. CD zusammen trifft, also bis F; dann ist Dr. ACF das verlangte Dr.; denn Dr. DFE $=$ Dr. ABC (s. die 92ste Aufg.), also auch Tr. CDEA $+$ Dr. DEF $=$ Tr. CDEA $+$ Dr. ABE oder Dr. ACF $=$ Pgr. ABCD.

102te Aufg. Man soll ein P. Tr. in ein Dr. gleichen Inhalts verwandeln.

(Sollten die Kinder die Auflösung dieser Aufgabe nicht von selbst finden, so komme ihnen der Lehrer auf folgende Art zu Hülfe.)

Lhr. (auf Fig. 74 hinweisend.) ABCD sey das P. Tr. Zeichnet es gleichfalls auf eure Tafeln! Ich will nun diesmal

die nöthigen H. L. nicht selbst ziehen, sondern euch nur angeben, wie ihr sie ziehen sollt.

Zieht aus dem W. bei A nach dem gegenüberstehenden W. nach D eine Eck-L. (nachdem es geschehen). Verlängert die längste der gll. S. CD um ein Stück, gleich der kürzern der beiden gll. S., oder um ein Stück = AB; bezeichnet das Ende der Verlängerung mit E. Ziehet endlich von B nach E eine L.; was ist nunmehr Fig. ABDE?

Kdr. ABDE ist ein Pgr.

Lhr. Was ist L. BD in Beziehung auf dieses Pgr.?

Kdr. BD ist Eck-L. des Pgr.

Lhr. Zieht eine zweite Eck-L. von A nach E. Wißt ihr nun die Aufg. zu lösen?

Kdr. Ja. Dr. ACE hat gleichen Inhalt mit dem P.Tr. ABCD, weil Dr. DEF = Dr. ABF ist; Tr. AFCD aber beiden Figuren, dem Dr. und dem P.Tr., gemeinschaftlich.

Lhr. Richtig! Ich dürfte also nur durch die Mitte der S. BD eine L. ziehen, und S. CD bis dahin verlängern, wo sie diese L. berührt.

103te Aufg. Man soll ein Tr. in ein Dr. gleichen Inhalts verwandeln.

(Der Lehrer kann hier ebenfalls das Tr., s. Fig. 75, zeichnen, sodann die nöthigen H. L. angeben, wie folgt:)

Lhr. Zieht eine Eck-L., allenfalls von A nach D, verlängert die S. BD, zieht aus C gll. mit der Eck-L. AD eine L. bis dahin, wo sie jene Verlängerung berührt; den P., wo beide zusammentreffen, bezeichnet mit E. Was für eine Figur ist nun ADEC? — Kdr. Ein P.Tr.

Lhr. Welches sind die gll. S.?

Kdr. AD und CE.

Lhr. Könnt ihr es jetzt beweisen?

(Wahrscheinlich wird ein oder das andere darauf kommen, daß noch eine Eck-L. AE gezogen werden muß, und sich erinnern, daß von den Dr., die in einem P.Tr. von den beiden Eck-L. gebildet werden, diejenigen beiden, die zwischen den gll. L. liegen, gl. Inhalt haben, folglich auch Dr. DEF = Dr. ACF, daß mithin das Dr. ABE dem Inhalte nach = dem Tr. ABCD und folglich das verlangte Dr. ist.)

104te Aufg. Man soll ein P. Tr. in ein Pgr. gleichen Inhalts verwandeln.

Lhr. Dies hier (auf Fig. 76 zeigend) sey das P. Tr. Wie habe ich es anzufangen, um es in ein Pgr. gl. Inhalts zu verwandeln?

Die Kinder werden die Auflösung leicht finden, daß man nemlich durch die Mitte einer der ungll. S. (z. B. der S. CD) gll. mit der andern ungll. S. (AB) eine L. ziehen, und die kürzere der gll. S. (AC) bis zu dieser H. L. verlängern muß (s. L. CF).

Nachdem dies geschehen, wird jeder den Beweis leicht finden, daß nemlich Dr. GDE = Dr. CFE, mithin P. Tr. ABCD mit Pgr. ABFG gl. Inhalt hat.

105te Aufg. Man soll ein F. E. in ein Dr. gl. Inhalts verwandeln.

Lhr. (auf Fig. 77 zeigend), ABCDE sey das F. E. Zeichne jeder ein ähnliches auf seine Tafel, und suche es in ein Dr. gl. Inhalts zu verwandeln.

(Sollten die Kinder nicht von selbst auf die Auflös. kommen, so ziehe der Lehrer die H. L. AG, EG, GD, dann erscheint AEGD als ein P. Tr., das vermittelst der H. L. AG in ein Dr. gleichen Inhalts, nemlich Dr. AGD verwandelt wird; dieses ist den Kindern aus der Auflös. der 102ten Aufg. hinlänglich bekannt. Eben so werden sie sich noch von der 103ten Aufg. her erinnern, wie ein Tr. in ein Dr. gleichen Inhalts verwandelt wird. Sie werden daher Tr. ABCD in ein Dr. gl. Inhalts zu verwandeln wissen; sie dürfen also nur H. L. AC ziehen, sodann BI, CI, AI, und nun eben so verfahren, wie auf der andern S. des F. E.; dann bekommen sie Dr. AIC; sie werden also die Aufg. ohne Schwierigkeit lösen.)

106te Aufg. Man soll ein Tr. mit einem äußern W. in ein Dr. gleichen Inhalts verwandeln.

(Der Lehrer lasse die Kinder einige Zeit lang die Auflös. suchen; finden sie dieselbe dann nicht, so zeichne er Fig. 78 an die Tafel, mit der H. L. BC und der gll. mit ihr gezogenen H. L. DE; sie werden sogleich das P. Tr. DEBC bemerken; eine 2te Eck-L. BE in dem P. Tr. ziehen, und durch

die Gleichheit der beiden Dr. ECF und BDF beweisen, daß Dr. ABE das gesuchte Dr. ist.)

Bisher hatte man gegebene Figuren in Figuren anderer Art, aber gleichen Inhalts, verwandelt; jetzt kann man dabei auch auf gleiche Höhe Rücksicht nehmen.

107te Aufg. Man soll ein Tr. mit einem äußern W. in ein Dr. gleichen Inhalts und gleicher Höhe verwandeln.

(Diese Aufgabe werden die Kinder schwerlich ohne Hülfe des Lehrers zu lösen vermögen; er zeichne daher Fig. 79 an die Tafel, jedoch ohne die H.L.; dann ziehe er zuerst H.L. BC, ferner gll. mit BC durch D den Sch.P. des äußern W., L. EF; endlich aus A durch D auf H.L. BC die L. AG. Nunmehr werden die Kinder von selbst darauf kommen, daß EDBG und DFGC P.Tr. sind, und daß das gegebene Tr. dadurch, daß man in beiden P.Tr. die Eck-L. EG und FG zieht, in ein Tr. ohne äußere W. verwandelt werden kann. Der Lehrer fahre sodann fort.)

Lhr. Wir haben also Tr. AEGF erhalten; das soll jetzt in ein Dr. gl. Inhalts und gl. Höhe verwandelt werden.

(Der Lhr. gebe den Kindern einige Zeit, um es zu finden; sollten sie es nicht selbst finden, so zeichne er das nunmehr erhaltene Tr. AEGF, ohne die L., die darin bei Fig. 79 vorkommen, an die Tafel [s. Fig. 80], und fahre dann fort.)

Zuerst muß ich die Höhe des Tr. bestimmen; ich ziehe daher durch den Sch.P. irgend eines der W. des Tr., allenfalls durch G, eine L. MN; gll. mit ihr ziehe ich durch den Sch.P. des gegenüberstehenden W. A eine 2te L.; ferner verbinde ich die beiden Sch.P., die in die gll. L. fallen, A und G durch L. AG, ziehe dann gll. mit AG aus E auf die eine der gll. L., z. B. auf MN, die L. EH.

(Zu den Kindern.) Jetzt fahrt fort; das Schwierigste ist geschehen.

Ein Kd. AHGE ist wieder ein P.Tr.; ich ziehe L. AH, so ist Dr. AEI = Dr. GHI; ich kann also GHI anstatt AEI annehmen. Eben so ziehe ich nun auf der andern S. gll. mit AG L. FK, sodann in dem Tr. AGKF Eck-L. AK, so ist auch Dr. AFL = Dr. GKL, folglich das ganze Dr. HKA, das jetzt entstanden, ist = Tr. AEGF.

Lhr. Haben beide Figuren auch gl. Höhe?

Kdr. Ja, denn sie liegen beide zwischen den nemlichen gll. Linien.

Lhr. Also ist das Dr. AKH von gleichem Inhalte und von gleicher Höhe mit dem anfangs gegebenen Tr. ABCD.

So wie nun hier eine Figur in eine andere von gleicher Höhe verwandelt worden ist, so kann man irgend eine gegebene Figur auch in eine andere Figur von bestimmter Höhe verwandeln.

108te Aufg. Man soll irgend ein F.E. in ein Pgr. von gegebener Höhe verwandeln.

(Vielleicht wissen sich auch hier die Kinder nicht sogleich zu helfen; man lasse ihnen etwas Zeit und komme ihnen dann auf folgende Art zu Hülfe:)

Lhr. Wißt ihr noch, wie man ein F.E. in ein Tr. verwandeln kann?

Kdr. Ja, und eben so kann man das Tr. in ein Dr. verwandeln.

Lhr. Thut das jetzt (nachdem es geschehen), dieses Dr. nun müssen wir in ein Pgr. umschaffen — wie wird das geschehen können?

Kdr. Umgekehrt, wie man ein Pgr. in ein Dr. verwandelte. Wir theilen die eine S. des Dr. in 2 gleiche Theile, z. B. AGI (s. Fig. 81) sey das Dr., das wir von dem F.E. erhielten, so theilen wir S. AI bei M, sodann ziehen wir gll. mit S. AG L. KL, und gll. mit GI L. AL = GK, so ist Pgr. ALGK das gesuchte.

Lhr. Was soll nun weiter geschehen?

Kdr. Das Pgr. ALGK soll in ein Pgr. von gegebener Höhe verwandelt werden.

Lhr. MN (diese L. an die Tafel zeichnend) sey die gegebene Höhe, Pgr. ACBD = Pgr. ALGK sey das von dem F.E. erhaltene Pgr. Ich ziehe gll. mit AC eine L. EF, deren senkrechter Abstand der gegebenen Höhe gleich kommt, verlängere dann S. AB und CD bis zu dieser L., so bekomme ich ein größeres Pgr. ACEF. Ich ziehe aus A nach F eine Eck-L. AF; ferner ziehe ich gll. mit CF durch den P. C, wo sich jene Eck-L. und die S. des Pgr. schneiden, L. HI, so be-

komme ich ein Pgr. AHEI, das die gegebene Höhe und gleichen Inhalt mit dem F. E. ABCDE Fig. 77 hat.

Wir wollen suchen, es zu beweisen.

Faßt zuerst das große Pgr. ACEF recht genau ins Auge! Aus welchen Figuren besteht es?

Kdr. Aus 4 Dr. und 2 Pgr.

Lhr. Richtig! Denkt euch nun die L. AF hinweg; aus welchen Figuren würde es dann bestehen?

Kdr. Aus 4 Pgr.

Lhr. Jetzt denkt euch die beiden L. HI und BD hinweg; aus welchen Figuren bestände es sodann?

Kdr. Aus 2 Dr.

Lhr. Aus den beiden Dr. AEF und ACF. — Würden diese beiden Dr. wohl gleich seyn?

Ein Kd. Ja, denn sie haben 3 gleiche S.

Ein anderes Kd. Ja, denn sie sind durch eine Eck-L. entstanden, die im Pgr. gezogen worden ist.

Lhr. Sind von den 4 kl. Dr. auch einige gleich?

Kdr. Ja, jedesmal die neben einander liegenden Dr. sind =; ABG = AHG; GIF = GDF.

Lhr. Warum?

Kdr. Sie sind durch Ecklinien entstanden, die im Pgr. gezogen worden sind.

Lhr. Richtig. Nun gebt Acht! Wenn ich von dem einen gr. Dr., z. B. von Dr. AEF, die beiden kl. Dr. BGA und IFG abziehe, was bleibt übrig?

Kdr. Dann bleibt Pgr. BGEI übrig.

Lhr. Und wenn ich von dem andern gr. Dr. ACF die beiden kl. Dr. AHG und GDF abziehe, was bleibt dann übrig? — Kdr. Dann bleibt Pgr. HCGD übrig.

Lhr. Wir haben vorhin gefunden,

1) daß die gr. Dr. AEF und ACF gl. waren, ferner
2) die kleinen Dr., nemlich Dr. BGA = Dr. AHG,
3) Dr. IFG = Dr. GDF.

Wenn ich also von jedem dieser gr. Dr. die kl. Dr. abziehe, die darin enthalten sind, so habe ich Gleiches von Gleichem abgezogen; was muß übrig bleiben?

Kdr. Es bleibt Gleiches übrig.

Lhr. Daraus folgt also:
daß die übrig bleibenden Pgr. **HCDG** und **BGEI** dem Inhalte nach einander gleich sind.

Könnt ihr nun finden, was noch zum Beweise fehlt.

Kdr. Ja, R.E. **AHBG** ist sich selbst gl.; thue ich von dem Pgr. **ABCD** das Pgr. **HCDG** hinweg, und thue statt dessen Pgr. **BGEI** hinzu, so habe ich Gl. hinweggenommen und Gl. hinzugethan, also ist Pgr. **AHEI** dem Inhalte nach = Pgr. **ABCD**, und da es die verlangte Höhe hat, so ist die Aufgabe gelöst.

(Man kann jetzt auch irgend eine gegebene Figur in ein Pgr. mit gegebener Höhe und einem gegebenen W. verwandeln, dies hat, nach obiger Auflösung, keine Schwierigkeit.)

XXVI. Stufe [b]). Theilung der Dreiecke nach verschiedenen Verhältnissen, von einem Punkte aus.

Lhr. Wenn ein Dr. von einem P. aus getheilt werden soll, wo kann der P. liegen?

Kdr. Er kann in einem W. des Dr. liegen, oder in einer S., oder in dem Dr. selbst.

Lhr. Gut. Wir wollen alle drei Arten durchnehmen. Ich zeichne hier ein Dr. an die Tafel. Von dem einen W. aus soll eine L. gezogen werden, welche das Dr. in zwei gl. Theile theilt. Wohin muß die L. gezogen werden?

Kdr. Auf die Hälfte der gegenüberliegenden S.

Lhr. Recht. Und wenn ich ein Drittel vom ganzen Dr. abschneiden sollte? — Kdr. Auf ein Drittel der S.

109te Aufg. Lhr. Das ist also sehr leicht. — Jetzt soll aber der P., von welchem aus gezogen werden soll, nicht mehr im W. liegen. Hier (Fig. 55, Taf. XIV), von d aus, soll ich eine L. ziehen, die das Dr. halbirt; d liegt um den dritten Theil der S. **ac** von **a** entfernt. Wie muß ich die L. ziehen?

(Sollten die Kinder es nicht selber finden können, so führe sie der Lehrer folgendermaßen darauf.)

Lhr. Wenn ihr von d nach b eine L. zieht, theilt diese das Dr. in 2 gl. Theile?

Kdr. Nein; denn das Dr. abd ist erst ein Drittel des Ganzen.

Lhr. Wie viel fehlt noch zur Hälfte?

Kdr. Ein Sechstel des Ganzen.

Lhr. So viel würdet ihr nun also zum Dr. abd hinzuthun müssen. Von welchem Dr. müßtet ihr dies Stück wegnehmen?

Kdr. Vom Dr. dbc.

Lhr. Gut. Wenn ich also von d aus nach der S. bc eine L. zöge, und träfe es gerade so, daß das Dr. bde ein Sechstel des Ganzen wäre, dann würde de die gesuchte L. seyn; nicht so? — Kdr. Ja!

Lhr. Dieser sechste Theil des Ganzen, wie viel würde er wohl vom Dr. dbc betragen?

Kdr. Dr. dbc ist $= \frac{2}{3}$ des Ganzen; das sind $\frac{4}{6}$. Wenn nun $\triangle$ bde $= \frac{1}{6}$ wäre, dann wäre Dr. bde $= \frac{1}{4}$ des Dr. dbc; denn $\frac{1}{6}$ ist von $\frac{4}{6}$ der vierte Theil.

Lhr. Wenn ich also den vierten Theil des Dr. dbc zum Dr. abd hinzunehme, dann wäre abed wie viel?

Kdr. Ein Halb des ganzen Dr.

Lhr. Können wir denn aber nicht finden, wohin wir ziehen müssen, um $\frac{1}{4}$ vom Dr. dbe abzuschneiden?

Kdr. Ja, auf ein Viertel der S. bc; denn wenn be $= \frac{1}{4}$ bc, so ist Dr. bde $= \frac{1}{4}$ des Dr. dbc oder ein Sechstel des Ganzen, und dann ist Dr. dec so groß als das Dr. abed oder $= \frac{1}{2}$ des Ganzen.

Auf diese Weise lasse der Lehrer das Dr. noch in 3, in 4 und mehr Theile theilen, gebe auch die Entfernung ad verschieden.

110te Aufg. Das Dr. abc soll in zwei gl. Theile getheilt werden, vom P. d aus. Die Entfernung des P. d von a ist aber nicht in Zahlen gegeben.

Auflös. Man ziehe die L. db, theile dann die S. ac bei e in 2 gl. Theile und ziehe die L. eb, dann ist Dr. abe $= \frac{1}{2}$ des Dr. abc; es muß also zum Dr. abd noch das Dr. dbe hinzukommen, um die Hälfte des ganzen Dr. zu erhalten. Man ziehe nun die L. ef gll. mit db, und dann nach dem dadurch gefundenen P. f die L. df. Alsdann ist Dr. bfd = Dr. bed, weil beide Dr. auf derselben Grundl. db und zwi-

schen denselben gll. L. db und ef stehen. Es ist daher einerlei, ob man zum Dr. abd das Dr. dbe oder das Dr. bfd hinzusetzt; beide Male giebt es zusammen die Hälfte des ganzen Dr. abc, und df ist demnach die gesuchte L.

111te Aufg. Das Dr. abc, Fig. 57, soll vom P. d aus in 3 gl. Theile getheilt werden.

Auflös. Man ziehe von d nach b die L. db, theile dann die S. ac in 3 gl. Theile bei e und f, und ziehe von e und f gll. mit db die L. h und g, oder bemerke bloß diese P. Man ziehe dann die L. dg und dh, welches die gesuchten L. sind.

Beweis. Dr. fgc + Dr. bgf = $\frac{1}{3}$ Dr. abc.

Dr. dgf = Dr. bgf, denn beide haben dieselbe Grundl. fg, und stehen zw. denselben gll. L. fg und db.

Folglich ist auch Dr. fgc + Dr. dgf = $\frac{1}{3}$ Dr. abc.

Dr. ahe + Dr. ehb = $\frac{1}{3}$ Dr. abc.

Dr. ehd = Dr. ehb, denn beide haben dieselbe Grundl. eh, und stehen zw. denselben gll. L. eh und dh.

Folglich ist auch Dr. ahe + Dr. ehd = $\frac{1}{3}$ Dr. abc.

Demnach bleibt für hdgb ebenfalls noch ein Drittel.

Der Lehrer lasse eben so noch in 4, in 5 und mehrere gleiche Theile theilen.

112te Aufg. Das Dr. abc, Fig. 58, soll vom P. d aus, der innerhalb des Dr. liegt, in 2 gl. Th. getheilt werden.

Auflös. Man theile die S. ac bei e in 2 gl. Theile und ziehe die L. eb. Dann ziehe man die L. db und de, und nehme auf der L. eb irgendwo einen P. h, ziehe dh, und dann gll. mit db die L. hg, und mit de die L. hf. Nach den so gefundenen P. f und g ziehe man die L. df und dg, welche das Dr. abc in 2 gll. Theile theilen.

Beweis. abde und die beiden Dr. dbh und deh sind = $\frac{1}{2}$ des Dr. abc.

Dr. bdg = Dr. bhd, und Dr. dfe = Dr. dhe.

Daher abde + bdg + dfe = $\frac{1}{2}$ Dr. abc.

Man konnte auch, wie in Fig. 59, eine L. bf von b aus gll. mit de und dann die L. df ziehen, so sind db und df die gesuchten L., weil Dr. dbe = Dr. def.

Der Lehrer kann dies auch auf Vierecke übertragen.

XXVII. Stufe. Auffinden der Gleichheit oder Ungleichheit des Inhalts der Dreiecke, welche auf der S. und Theilungs-L. eines gegebenen Dreiecks ähnlich beschrieben worden.

a) Die S. des gegebenen Dr. wird S. des neuen Dr.

113te Aufg. Auf der S. eines glf. Dr. wird ein ähnliches Dr. errichtet. Wie verhält sich dasselbe zum ersten Dr.?

Lhr. Zeichnet zuerst ein solches Dr. (Fig. 75, Taf. XV) ABC. Wenn wir nun mit der S. AC ein ebenfalls glf. Dr. machen; wie verhält sich dies zum vorigen?

Kdr. Beide sind gleich. Denn weil dies auch ein glf. Dr. ist, so sind die W. in dem einen wie in dem andern; und weil beide die S. AC gemeinschaftlich haben, so sind die Dr. gleich und haben gleichen Flächeninhalt.

Lhr. Richtig! In dieser Fig. (er zeichnet Fig. 76) theile ich die S. AC des glf. Dr. ABC in zwei gl. Theile bei E, und mache mit der S. AE ein glf. Dr. — Wie verhält sich dies zum vorigen?

Kdr. Wenn wir das glf. Dr. ACD mit der S. AC machen, so ist es gleich dem Dr. ABC. — Weil nun das Dr. AEF auch ein glf. Dr. ist, so muß der W. AEF = W. ACD, und darum die L. EF gll. mit der L. CD seyn. Ziehe ich die L. FG gll. mit AC, und dann die L. EG, so erhalte ich 4 gl. Dr. Darum ist das Dr. AEF = $\frac{1}{4}$ des Dreiecks ACD oder des Dr. ABC.

(Man kann dies auch durch die L. EF, und eine von F nach C gezogene L. beweisen. Da ähnliche Aufgaben schon früher dagewesen sind, werden die Kinder leicht finden, daß wenn AE = $\frac{1}{3}$ AC, das neue Dreieck = $\frac{1}{9}$ des alten; ist es $\frac{1}{4}$, so wird es gleich $\frac{1}{16}$ seyn ꝛc. Ueberhaupt immer so viel, als die gegebene Zahl mit sich selber multiplicirt.)

b) Figuren auf L., die mit der S. des Dr. gll. gezogen sind.

In dem glf. Dr. ABC Fig. 77, ist die L. DE gll. mit BC, von der Hälfte der L. AB gezogen. Wie groß ist das auf dieser L. DE zu errichtende Dr. DHE?

Weil DE = AE, so wird Dr. DHE = $\frac{1}{4}$ des Dr. ABC seyn, welches leicht zu beweisen ist. Bleibt alles wie vorher,

man soll aber mit der halben L. DE, nämlich mit DF, ein gls. Dr. beschreiben, so wird dieses Dr. DGF = $\frac{1}{4}$ des Dr. DHE, also gleich $\frac{1}{4}$ eines $\frac{1}{4}$, folglich $\frac{1}{16}$ des Dr. ABC.

Es ist leicht einzusehen, daß man von jedem Punkte der L. AB ziehen, und dann DE beliebig theilen kann; sobald die Theile in Zahlen angegeben sind, ist das neu entstandene Dr. jederzeit zu bestimmen; z. B. in Fig. 78 sey AD = $\frac{2}{3}$ AB, so ist Dr. DEH = $\frac{4}{9}$ ABC. Ist nun DF = $\frac{1}{2}$ DE, so ist DGF = $\frac{1}{4}$ DHE, also = $\frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ ABC.

c) Die Höhe des alten Dr. wird S. des neuen Dr.

114te Aufg. In Fig. 79 ist AD rwkl. auf BC gezogen. Diese L. ist daher die Höhe des Dr. ABC. Sie soll die S. des neuen gls. Dr. ADE werden, oder man soll mit ihr ein gls. Dr. machen. Wie verhält sich das neue Dr. ADE zum alten? —

Es giebt mehrere Arten der Auflösung. Eine der leichtesten ist folgende. Der Lehrer mag den Kindern allenfalls die H. L. DF ziehen.

Lhr. Ich theile den W. ADE durch die L. DF in zwei gl. Theile. Vergleicht jetzt die beiden Dr. FDG und CDG.

Kdr. Sie sind gleich. Denn ADC ist ein r. W., ADE ist $\frac{2}{3}$ eines r. W. — Daher ist GDC noch $\frac{1}{3}$ eines r. W. — Weil aber W. ACD = $\frac{2}{3}$ eines r. W. ist, so ist W. DGC ein r. W., folglich auch sein N. W. DGF. Nun ist außerdem in den beiden Dr. W. FDG = W. CDG, weil beide gleich gemacht sind. Die S. DG aber ist gemeinschaftlich. Daher sind in beiden Dr. eine S. und die daran gelegenen W. gleich, folglich sind auch beide Dr. gleich.

Lhr. Gut. Vergleicht jetzt die L. AF und FC mit der L. DF.

Kdr. Weil W. CDG = $\frac{1}{3}$ eines r. W., FDG ihm aber gleich ist, so ist W. FDC = $\frac{2}{3}$ eines r. W. = W. FCD. Daher muß auch W. DFC = $\frac{2}{3}$ seyn, folglich ist Dr. DFC ein gls. Dr., und DF = FC.

Der W. ADF muß aber = W. DAF seyn, weil jeder = $\frac{1}{3}$ eines r. W. ist. Daher ist Dr. AFD ein glsch. Dr., folglich AF = DF oder FC. Es muß also AF = $\frac{1}{2}$ AC seyn.

Wie viel ist Dr. ADC vom Dr. ABC?

Kdr. Die Hälfte, weil BD = $\frac{1}{2}$ BC ist.

Lhr. Wie viel ist aber die L. AG von AC?

Kdr. Drei Viertel; denn weil FG = GC, so ist AG = $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Lhr. Wie viel beträgt nun Dreieck ADG vom Dreieck ADC?

Kdr. Drei Viertel, weil die L. AG $\frac{3}{4}$ von AC ist.

Lhr. Das Dr. ADG ist also $\frac{3}{4}$ vom halben Dr. ABC?

Kdr. Ja, denn das halbe Dr. ABC ist eben das Dr. Drei Viertel der Hälfte sind aber $\frac{3}{8}$ vom Ganzen.

Lhr. Vergleicht jetzt das Dr. AGE mit dem Dr. AGD.

Kdr. Beide sind gleich. (Der Beweis ist leicht zu führen.)

Lhr. Wie viel betragen also beide Dr., ADG und AEG, oder das Dr. ADE vom Dr. ABC?

Kdr. $\frac{6}{8}$ oder $\frac{3}{4}$.

Lhr. Was folgt daraus?

Kdr. Das glf. Dr., welches zu seiner S. die Höhe eines glf. Dr. hat, beträgt nur $\frac{3}{4}$ von diesem.

Lhr. Wie groß ist das glf. Dreieck, das zu seiner Seite die halbe Höhe des gegebenen glf. Dr. hat? (S. Fig. 80.)

Kdr. Wenn wir das Dr. ADE machen, so ist dieses $\frac{3}{4}$ vom Dr. ABC. Das Dr. AFG aber ist $\frac{1}{4}$ des Dr. ADE, daher ist dieses $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ des Dr. ABC oder $\frac{3}{16}$ ABC.

(Der Lehrer wird leicht einsehen, wie diese Aufgaben noch weiter abzuändern sind.)

d) Die Seite des gegebenen glf. Dr. wird die Höhe des neuen glf. Dr.

115te Aufg. Es ist dies nur das Umgekehrte der vorigen Aufgaben. ABC in Figur 81 sey das gegebene glf. Dr. Die Seite AC werde die Höhe des neuen Dr. ADE. — Wäre dieses das Stammdreieck, so würde das auf seiner Höhe AC errichtete Dr. ABC $\frac{3}{4}$ von ihm betragen. Demnach hat ABC 3 Theile, wie ADE 4, oder ADE ist $\frac{4}{3}$ des Dr. ABC.

In Fig. 82 habe das neue Dr. zu seiner Höhe $\frac{2}{3}$ von der Seite des Dr. ABC. Wie verhält es sich zu diesem? —

Das Dr. AFG ist $\frac{4}{9}$ des Dr. ADE (denn die S. AF ist ebenfalls $\frac{2}{3}$ AD, wenn AH = $\frac{2}{3}$ AC); da nun ADE

$= \frac{4}{3}$ ABC, so ist AFG $= \frac{4}{9} \times \frac{4}{3}$ ABC oder $\frac{16}{27}$ des Dreiecks ABC.

e) Eine von Seite auf Seite gezogene L. werde die Seite des neuen Dreiecks.

116te Aufg. In Fig. 83 sey ABC ein gls. Dr. Man schneide auf AB bei D ein beliebiges Stück BD ab; ein eben so großes Stück AE schneide man auf AC ab, und verbinde beide Punkte durch die L. DF. Man ziehe die L. EF so, daß FC eben so groß ist als AE oder BD. — Es frägt sich: ob DEF ein gls. Dr. ist?

Lhr. Sind die drei S. des Dr. DEF gleich?

Kdr. Ja! Denn BD, AE und FC sind einander gleich; weil nun die ganzen Seiten gleich sind, so sind auch die Stücke AD, EC und BF einander gleich. Die von diesen Seiten eingeschlossenen W. sind ebenfalls gleich; daher, weil in jedem Dr. zwei S. und der davon eingeschlossene W. gleich sind, müssen die Dr. DBF, FCE und EAD gleich seyn. Dann sind auch die L. DF, FE und ED gleich; folglich ist das Dr. DEF ein gls. Dr.

Lhr. Richtig! Wenn also in einem gls. Dr. ein anderes gls. Dr. so liegt, daß gleiche Dreiecke (wie hier DBF, FCD und EAD) abgeschnitten werden, so fallen die Ecken des neuen Dr. in die Seiten des alten, und weder in das gegebene Dr. hinein noch darüber hinaus. Und umgekehrt: wenn ein gls. Dr. in einem anderen gls. Dr. so liegt, daß dessen Ecken in die Seiten des andern fallen, so werden die dadurch gebildeten Dr. gleich.

(Der Lehrer kann die Aufgabe auch so geben: Wenn ich in dem gls. Dr. ABC die L. BD und AE gleich mache, und ziehe DE, auf welcher ich ein gls. Dr. setze; wird F in die Seite BC fallen? —)

Lhr. Wenn nun BD oder AE $= \frac{1}{3}$ einer Seite ist, wie groß ist das Dr. DEF, verglichen mit dem Dr. ABC?

Kdr. Wenn BD $= \frac{1}{3}$ AB, so ist AD $= \frac{2}{3}$ AB, und eben so EC. Daher ist das Dreieck ADE $= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ vom Dreieck ABC. — Eben so groß ist jedes der beiden anderen Dreiecke. Sie betragen daher zusammen $\frac{6}{9}$ und, da das Dr.

DEF übrig bleibt, wenn ich sie vom ganzen Dr. ABC wegnehme, so beträgt dieses $\frac{3}{9}$ oder $\frac{1}{3}$ von ABC.

Lhr. Wie groß ist es, wenn BD oder AE $= \frac{1}{4}$ einer Seite ist?

Kdr. Dann ist Dr. ADE $= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$, alle drei also $\frac{9}{16}$, folglich ist Dr. DEF $= \frac{7}{16}$ des Dr. ABC.

Lhr. In Fig. 84 soll AD $= \frac{3}{4}$, AE $= \frac{1}{2}$ einer Seite seyn. Es wird die Linie DE gezogen, und darauf ein glf. Dr. DEF errichtet; wie groß ist dies gegen ABC.

Kdr. Wir ziehen durch die Spitze F eine L. GH gll. mit BC, und verlängern die Seiten AB und AC, bis sie diese L. GH in G und H schneidet. Dann ist Dr. AGH ein glf. Dr., weil die W. bei G und H sind wie bei B und C. Jetzt liegen die Ecken des Dr. DEF in den Seiten des Dr. AGH, daher sind die drei Dreiecke ADE, GFD und HEF einander gleich, folglich die Seite DG so groß als EA. — Da nun DB $= \frac{1}{4}$ AB, so muß BG auch $\frac{1}{4}$ AB seyn; daher ist AG $= \frac{5}{4}$ der Seite AB. Das Dr. AGH ist deswegen $\frac{25}{16}$ des Dreiecks ABC, oder hat 25 Theile wie dieses 16. Nehmen wir nun die drei gleichen Dreiecke von diesem großen Dr. weg, so bleibt das Dr. DEF übrig. Das Dreieck ADE beträgt aber $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ vom Dr. ABC. Daher werden die Dreiecke ADE, DFG, FEH dreimal so viel oder $\frac{9}{8}$ betragen. $\frac{9}{8}$ sind $= \frac{18}{16}$, das Dreieck AGH hatte $\frac{25}{16}$; nehmen wir $\frac{18}{16}$ von $\frac{25}{16}$ weg, so bleiben $\frac{7}{16}$ für das Dr. DEF. Dies hat daher 7 Theile wie das Dr. ABC 16 Theile hat.

Lhr. Gut. Hier in Fig. 85 ist DE von $\frac{1}{2}$ AB nach $\frac{1}{4}$ AC gezogen. Wie groß ist das glf. Dr. DFE?

Kdr. Wir ziehen wieder durch die Spitze F eine L. gll. mit BC, nemlich GH. Jetzt sind die Dr. ADE, GFD und HEF einander gleich. Daher ist DG $=$ AE $= \frac{1}{4}$ AB, folglich ist AG $= \frac{3}{4}$ AB. Das Dr. AGH ist daher $= \frac{9}{16}$ des Dr. ABC. Das Dr. ADE ist $= \frac{1}{8}$, die drei gleichen Dreiecke ADE, GFD und HEF sind dreimal so viel, betragen also $\frac{3}{8}$ oder $\frac{6}{16}$; werden diese weggenommen von $\frac{9}{16}$, so bleibt für das Dr. DEF $\frac{3}{16}$ übrig.

(Der Lehrer ändere in diesen beiden letzten Figuren die Zahlen nach Belieben, bis die erforderliche Fertigkeit erlangt ist.

Wäre z. B. in Fig. 85 AD $\frac{1}{2}$, AE $\frac{1}{3}$, so würde DG auch $\frac{1}{3}$, daher AG $= \frac{5}{6}$, und Dr. AGH $= \frac{25}{36}$ des Dr. ABC. — Dr. ADE wäre $\frac{1}{6}$, die drei gleichen Dreiecke also $\frac{3}{6}$ oder $\frac{18}{36}$; diese weggenommen von $\frac{25}{36}$ gäbe für das Dr. DEF $\frac{7}{36}$ des Dr. ABC u. s. f.

f) Eine vom Winkel aus auf die Seite gezogene Linie werde die Seite des neuen Dreiecks.

117te Aufg. Lhr. Fig. 86 sey ABC ein glf. Dr. — Ich ziehe von A nach D die Linie AD auf $\frac{1}{4}$ BC. Die L. AD wird die S. des neuen Dr. ADF. Wie verhält sich letzteres zum Dr. ABC?

Der Lehrer mache die Kinder aufmerksam, daß die Auflösung fast ganz die vorige ist. Wenn das Dr. ADF gemacht ist, so ziehe man durch die Spitze F eine L. GH gll. mit AC, und verlängere BA bis G und BC bis H. Alsdann sind wieder die drei Dr. ABD, DHF, FGA unter sich gleich, daher ist AG $=$ BD $= \frac{1}{4}$ AB, folglich ist BG $= \frac{5}{4}$, und Dr. BGH $= \frac{25}{16}$ des Dr. ABC. Nimmt man nun vom ganzen Dr. BGH die drei gleichen Dr. ABD, DHF und FGA weg, so bleibt das Dr. ADF übrig. Es beträgt aber ABD $\frac{1}{4}$ des Dr. ABC; daher sind die drei Dr. $= \frac{3}{4}$ von ABC.

Nehmen wir diese $\frac{3}{4}$ von BGH oder $\frac{25}{16}$ weg, so bleiben $\frac{13}{16}$ für das Dr. ADF, oder dieses hat 13 Theile wie ABC 16.

Wäre BD $= \frac{1}{3}$ BC, so wäre BGH $= \frac{16}{9}$, und die drei gleichen Dr. $= \frac{9}{9}$, folglich Dr. ADF $= \frac{7}{9}$ des Dr. ABC.

Wäre BD $= \frac{1}{5}$ BC, so wäre BGH $= \frac{36}{25}$, und die drei gleichen Dr. $= \frac{3}{5}$ oder $\frac{15}{25}$; daher bliebe für das Dr. ADF $\frac{21}{25}$ des Dr. ABC.

Ueberhaupt ist das Dr. ADF immer $= (1 + \text{BD})^2 - 3\,\text{BD}$, wobei BD durch eine Zahl ausgedrückt seyn muß.

Jetzt muß es keinen Fall mehr geben, den die Kinder nicht lösen könnten, man mag die L. ziehen, wie man will. Dem aufmerksamen Lehrer wird es übrigens nicht entgehen, daß der in Fig. 83 aufgegebene Fall und der dafür gelieferte Beweis der Hauptbeweis für alle diese, auch selbst für die vorhergehenden Aufgaben ist, wenn die L. durch das Dr. gezogen, indem sich jede derselben auf ihn bringen läßt. Es ist bald einzusehen, daß wenn man z. B. die Aufgaben in Fig. 77, 78 und 79

so behandelt, daß man durch die Spitze des neuen Dr. eine mit der Seite des Stamm-Dr. gll. L. zieht, drei gl. Dr. entstehen müssen, die man dann, wie in den letzten Fällen, nur wegzunehmen braucht, um das neue Dr. zu haben.

Sind die Kinder jetzt schon so weit, daß sie verstehen, die Quadratwurzel auszuziehen, so kann der Lehrer eine neue Reihe von Aufgaben anknüpfen. Er braucht nur darauf aufmerksam zu machen, daß der Inhalt ähnlicher Dr. sich verhält, wie ihre ähnlich liegenden Seiten mit sich selbst multiplicirt, also wie die Quadrate dieser Seiten. Haben wir z. B. zwei gleichseitige Dr., in dem einen sind die S. noch einmal so groß als in dem andern, so verhält sich der Inhalt wie 1 : 4; sind die Seiten in dem einen 3 mal größer als in dem andern, so ist der Inhalt 9 mal größer; wenn sie viermal größer sind, 16 mal u. s. f. Wäre der Inhalt 25 mal größer in dem einen, so würden seine Seiten 5 mal größer seyn. Um diese zu finden, braucht man also nur die Quadratwurzel aus dem Inhalte zu ziehen, und so kann man in den vorigen Aufgaben das Verhältniß der gezogenen Linien zu den Seiten des Dr. bestimmen lassen.

Z. B. Wie groß ist die L. **AD** gegen **AB** in Fig. 79?

Weil sich Dr. **ADE** verhält zu Dr. **ABC** wie 3 zu 4, so stehen ihre Seiten in dem Verhältnisse wie die Quadratwurzeln aus diesen Zahlen, also wie $\sqrt{3} : \sqrt{4} = \sqrt{3} : 2$.

Oder, weil Dr. **ADE** $= \frac{3}{4}$ des Dr. **ABC**, so ist seine Seite **AD** $= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Hier ist die Seite **AB** als 1 angenommen.

In Fig. 84 ist Dr. **DEF** $= \frac{7}{16}$, daher die Seite **DE** $= \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{7}$, wenn **AB** $= 1$ ist

In Fig. 85 ist Dr. **DEF** $= \frac{3}{16}$, daher die Seite **DE** $= \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

In Fig. 86 ist Dr. **ADF** $= \frac{13}{16}$, daher die Seite **AD** $= \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{13}$, wobei die Seite **AB** immer gleich 1 gerechnet ist.

Verstehen die Kinder keine Quadratwurzel auszuziehen, so muß dies Letztere weggelassen werden.

XXVIII. Stufe. Auffinden der Gleichheit oder Ungleichheit des Inhalts der Vierecke, welche auf den S. und Theilungslinien eines gegebenen Vierecks ähnlich beschrieben werden.

So wie vorher von den Dr. nur das glf. Dr. durchgeführt wurde, so soll hier von den Vierecken nur das Quadrat genommen werden. Es wird sich bald zeigen, daß seine Behandlung ganz der des Dr. ähnlich ist.

a) Die S. des gegebenen Qu. wird S. des neuen Quadrats.

118te Aufg. Auf der S. eines Qu. wird ein anderes Qu. errichtet. Wie verhält sich dieses zum ersten?

Die Kinder werden leicht finden, daß beide gleich seyn müssen.

In Fig. 87 wird auf der halben S. des Qu. ABCD, nemlich auf CE, ein Quadrat errichtet, wie groß ist dies?

Die Kdr. werden ohne Mühe finden, daß es $= \frac{1}{4}$ des großen Qu. sey. Der Lehrer wird jetzt statt der Zahl $\frac{1}{2}$ noch andere Zahlen wählen können, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ u. s. w.; auch kann er die L. CD um einen bestimmten Theil verlängern, und mit dieser ganzen L. ein Qu. bilden, und so den Inhalt bestimmen lassen. Die Kinder werden finden, daß sie nur die in einer Zahl gegebene Linie mit sich selber zu multipliciren brauchen, um den Inhalt zu haben.

b) Eine mit der S. gll. gezogene Linie wird die S. des neuen Qu.

119te Aufg.[a.] In Fig. 88 ist EF gll. mit CD. Ich nehme von dieser L. den dritten Theil, EG, und errichte darauf ein Qu. — Wie verhält sich dies zum gegebenen Qu.?

Auflös. Weil $EG = \frac{1}{3} EF$, so ist auch das Qu. EGHI $= \frac{1}{9}$ desjenigen Qu., von welchem EF eine Seite. Weil aber $EF = AB$, so ist auch das Qu. von $EF =$ dem Qu. von AB, folglich ist das kleine Qu. $= \frac{1}{9}$ des großen.

Da diese Fälle sehr leicht sind, so werden hier nicht mehr Aufgaben gegeben. Der Lehrer kann sie leicht selbst auffinden, wenn sie nöthig seyn sollten. Er kann auch die gll. gezogene L. um einen bestimmten Theil verlängern, und mit der ganzen L. ein Qu. bilden, dessen Verhältniß zum gegebenen gesucht wird. Wäre z. B. EF verlängert worden, so daß der außer-

halb des Qu. liegende Theil der L. = $\frac{1}{3}$ von EF, so würde die ganze L. = $\frac{4}{3}$ EF = $\frac{4}{3}$ AB seyn. Daher das Qu. $\frac{16}{9}$, oder das neue Qu. hätte 16 Theile wie das alte 9, u. s. f.

c) Die Ecklinie des gegebenen Qu. wird S. des neuen Qu.

119te Aufg.[b] In Fig. 89 sey ABCD das gegebene Qu. — Man mache mit der Ecklinie BC ein neues Qu. BCEF. Wie verhalten sich beide?

Der Beweis ist sehr leicht zu führen, daß das neue Qu. doppelt so groß ist als das alte.

Wenn das neue Qu., wie in Fig. 90, zu seiner Seite nur die halbe Ecklinie hat, so wird es auch nur halb so groß als das gegebene Qu. ABCD, was ebenfalls leicht zu beweisen ist. Denn dieses Qu. BEDF ist nur $\frac{1}{4}$ von dem Qu. der Eckl. BC, weil seine Seite nur $\frac{1}{2}$. Da das Qu. der Ecklinie aber = 2 Ganzen, so ist Qu. BEDF = $\frac{1}{4}$ von 2 Ganzen = $\frac{1}{2}$ von ABCD. Man kann auch anders verfahren.

Wäre EB = $\frac{2}{3}$ BC, so wäre das Qu. BEDF = $\frac{4}{9}$ des Qu. der S. BC, also = $\frac{4}{9}$ von 2 mal das Qu. ABCD = $\frac{8}{9}$ dieses Quadrats. Da auch dieser Fall leicht ist, werden die gegebenen Aufgaben hinreichen, dem Lehrer zu zeigen, wie er nöthigenfalls bei der Bildung und Auflösung neuer Aufgaben zu verfahren habe.

d) Die S. des gegebenen Qu. wird Ecklinie des neuen Qu.

120ste Aufg. Auch dieser Fall ist sehr leicht, und nur die Umkehrung des Vorigen. In Fig. 90 sey ABCD das gegebene Qu. — BD sey die Ecklinie des neuen Qu. BEDF, so ist letzteres = $\frac{1}{2}$ des großen Qu.

In Fig. 91 ist ABCD wieder das gegebene Qu. — Die Hälfte der S. BD, nemlich BG, werde die Ecklinie des neuen Qu. BEGF. Wie groß ist letzteres, verglichen mit dem ersteren?

Auflös. Das Quadrat, von welchem BD Ecklinie ist, wird 4 mal so groß seyn als das Qu. BEGF, denn die L. BD ist noch einmal so groß als BG. Daher ist das Qu. BEGF = $\frac{1}{4}$ dieses Qu., da letzteres aber, wie vorher bewiesen, gleich der Hälfte vom Qu. ABCD ist, so ist das kleine Qu. = $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ des großen.

Wäre BG = $\frac{1}{3}$, so wäre das kleine Qu. = $\frac{1}{18}$ des großen. Wäre BG = $\frac{2}{3}$, so würde es = $\frac{2}{9}$ des Großen seyn.

In Fig. 92 wird die Seite BD des gegebenen Quadrats ABCD um so viel verlängert, daß $DG = \frac{1}{4}$ BD. Diese ganze L. BG wird Ecklinie des neuen Qu. BEGF. Wie verhält sich letzteres zum ersten Qu.?

Auflös. Es ist jetzt $BG = \frac{5}{4}$ DB, daher ist das Qu. $BEGF = \frac{25}{16}$ des Qu. BHDI, welches $\frac{1}{2}$ von dem Qu. ABCD ist. Daher ist Qu. $BEGF = \frac{25}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{32}$ des Qu. ABCD.

e) Eine L. von einer S. auf die benachbarte S. gezogen, wird S. des neuen Qu.

121ste Aufg. Lhr. In dem Qu. ABCD Fig. 93 ziehe ich von einem beliebigen Punkte E eine L. EH nach H, jedoch so, daß HB = AE. Ich nehme ferner einen Punkt G, von D so weit entfernt als H von B, und dann noch einen, F, von C eben so weit entfernt, so daß also die L. AE, HB, GD und CF alle gleich sind. Ich ziehe diese Punkte durch die Linien HG, GF und FE zusammen. Es frägt sich: ob die vierseitige Fig. EFGH ein Qu. ist?

Kdr. Die Figur wird ein Qu. seyn, wenn alle 4 Seiten gleich sind.

Lhr. Ist das richtig?

Kdr. Nein, es könnte auch eine Raute seyn.

Lhr. Was wird demnach noch weiter zu beweisen seyn?

Kdr. Daß alle W. rechte W. sind.

Lhr. Gut. Versucht jetzt einmal die Aufgabe zu lösen.

Kdr. Weil die vier Seiten des Qu. ABCD = sind, und die vier Stücke AE, HB, GD und CF ebenfalls, so müssen auch die vier Stücke AH, BG, DF und CE einander gleich seyn.

Lhr. Richtig.

Kdr. Jetzt haben wir in den vier Dr. AEH, BHG, EGF und CFE, in jedem zwei Seiten wie in dem andern. Die von diesen beiden Seiten eingeschlossenen W. sind aber auch gleich, denn sie sind sämmtlich r. W. — Folglich sind die vier Dr. gleich.

Lhr. Gut. Was folgt daraus?

Kdr. Daß auch die Seiten EH, HG, GF und FE einander gleich sind.

Lhr. Gut. Jetzt ist noch zu beweisen, daß die von diesen

Seiten eingeschlossenen W. rechte W. sind. Wenn die vier Dr. gleich sind, so müssen auch die W. in dem einen seyn, wie in dem andern. Welche Winkel sind daher gleich?

Kdr. AHE ist = BGH = DFG = CEF.

Lhr. Richtig. Der W. AHG ist aber Außen-W. des Dr. HGB. Wie groß ist er?

Kdr. So groß als W. HBG und HGB dazu genommen.

Lhr. Wenn nun W. AHE so groß ist als W. HBG, wie groß ist noch W. EHG?

Kdr. So groß als W. HBG, und weil HBG ein r. W. ist, so muß auch W. EHG ein r. W. seyn.

Lhr. Gut. Wie ist es nun mit den übrigen Winkeln?

Kdr. Da läßt es sich eben so beweisen. Weil Winkel BGF = W. GDF + W. DFG, der W. DFG aber = W. BGH, so ist W. HGF = W. GDF = einem r. W. u. s. w.

Lhr. Daraus folgt also: Wenn in einem Quadrate auf allen Seiten Punkte in gleichen Entfernungen von den Ecken genommen und durch Linien zusammen gezogen werden, so entsteht in der Mitte ein Qu. und rund herum vier gleiche Dreiecke.

Der Satz läßt sich auch umgekehrt geben und ohne Mühe beweisen, nemlich so (Fig. 93):

Wenn durch zwei Ecken, H und E, eines Qu. EFGH zwei L. BA und AC gezogen werden, die sich in A rechtwinklich schneiden, und man zieht durch die beiden andern Ecken des Qu. F und G zwei L. CD und DB mit den beiden vorigen gll. und so, daß alle vier L. einander schneiden, so bilden die durch die Ecken gezogenen L. AB, BD, DC und CA ein Qu. und außerdem mit der S. des innern Qu. vier gl. Dr. —

Kdr. Bei A ist ein r. W., die L. CD geht gll. mit AB, daher ist bei C der innere Gegenwinkel zu A. Der innere G. W. eines r. W. ist aber selbst ein r. W. — Weil nun BD gll. mit AC, so ist bei D wieder der G. W. zu dem bei C, und bei B der zu dem W. bei D oder A; alle W. sind demnach r. W.

Lhr. Gut. Folgt daraus, daß ABCD ein Qu. ist?

Kdr. Nein, es könnte auch ein anderes Rechteck seyn.

Lhr. Was fehlt also noch?

Kdr. Wir müssen beweisen, daß auch die Seiten gleich groß sind.

Lhr. Versucht dies nun.

Kdr. Die Seiten EF, FG, GH und HE sind gleich, weil sie S. eines Qu. sind.

Lhr. Richtig!

Kdr. Die W., welche sie einschließen, sind r. W. aus demselben Grunde.

Lhr. Gut!

Kdr. Der W. CEH ist A. W. des Dr. EAH; er ist also so groß, als W. EAH + W. EHA, d. h. so groß als ein r. W. + W. EHA. Nun ist FEH auch ein r. W., folglich ist W. CEF = W. EHA. Jetzt haben wir in beiden Dr. EAH und CEF zwei W. gleich; daraus folgt, daß auch die dritten W. HEA und EFC einander gleich sind. Da außerdem beide Dr. eine gleiche Seite, nemlich EH und EF haben, so sind beide Dreiecke gleich; daher EC = AH und AE = CF.

Lhr. Weiter.

Kdr. Bei C ist ein r. W. — Daher betragen die beiden W. im Dr., nemlich W. CFE + W. CEF einen r. W. Weil nun W. EFG ein r. W. ist, so ist W. EFC + W. GFD auch noch gleich einem r. W. — Daher ist W. CFE + W. CEF = W. CFE + W. GFD, folglich, wenn wir W. DFE von beiden wegnehmen, W. CEF = W GFD. — Daraus folgt auch, daß W. DGF = W. CFE.

Lhr. Gut. Was wollt ihr nun damit beweisen?

Kdr. Weil beide Dr. auch eine gl. S. haben, nemlich EF = FG, so sind beide Dr. wieder gleich, und daher EC = FD und CF = DG.

Lhr. Nun vergleicht noch das vierte Dr. BGH.

Kdr. Hier ist der Beweis eben so. W. BGH + W. FGD = 1 r. W. — Aber W. GFD + W. FGD = auch 1 r. W., folglich ist W. GFD = W. BGH, und darum auch W. BHG = W. DGF, außerdem S. FG = S. GH, folglich die Dr. GFD und HGB einander gleich, daher auch BG = FD und HB = GD.

Lhr. Was haben wir also nun bewiesen?

Kdr. Daß alle vier Dreiecke gleich sind.

Lhr. Und was können wir weiter beweisen?

Kdr. Daß ABCD ein Qu. ist. Denn es muß jetzt, weil AH = BG = DF = CE, und HB = GD = FC = EA ist, auch AH + HB = BG + GD = DF + FC = CE + EA seyn.

Es ist diese Aufgabe abermals eine Hauptaufgabe, und sie verhält sich zur Lösung der Aufgaben im Qu., wie Fig. 83 und die darauf sich beziehende Aufgabe zu den Dr.

In Fig. 94 ist in dem Qu. ABCD von der halben Seite AC nach $\frac{3}{4}$ der Seite AB, von E nach H eine L. gezogen. Wie groß ist das Qu. derselben im Verhältniß zum Qu. der Seite AB?

Auflös. Man ziehe durch die Ecken F und G des neuen Quadrats Linien, LK gll. mit AB, IK gll. mit AC, so sind die vier Dr. AEH, LFE, KGF und IHG einander gleich, daher EL = AH. — Weil nun AH = $\frac{3}{4}$ einer Seite, so ist auch EL so groß, folglich AL = $\frac{5}{4}$ der Seite AC, daher das Qu. AIKL = $\frac{25}{16}$ des Qu. ABDC. — Das Dreieck AEH aber ist = $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ des Quadrats ABDC, daher alle 4 Dreiecke = $\frac{12}{16}$. Werden diese abgezogen von $\frac{25}{16}$, so bleiben für das Qu. EFGH $\frac{13}{16}$ des Qu. ABDC.

In Fig. 95 ist AE = $\frac{1}{3}$ AC, AF = $\frac{1}{2}$ AB. Wie groß ist das Qu. der Linie EF?

Auflös. Wenn durch die Ecken H und G die L. LK gll. mit AB, und IK gll. mit AC gezogen werden, so ist ALKI ein Qu., und EL = AF = $\frac{1}{2}$; folglich ist AL = $\frac{5}{6}$ AC, und darum Qu. ALKI = $\frac{25}{36}$ des Qu. ACDB. — Nun ist Dr. AEF = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ des gr. Qu., alle vier Dr. demnach = $\frac{4}{12} = \frac{12}{36}$ desselben. Werden diese abgezogen von $\frac{25}{36}$, so bleiben für das Qu. EFGH $\frac{13}{36}$ des großen Qu. ACDB.

Daß diese Aufgaben sich vielfach verändern lassen, und bis die nöthige Fertigkeit in der Auflösung gewonnen worden, verändert werden müssen, ergiebt sich von selbst.

f) Eine vom Winkel nach der Seite gezogene L. wird S. des neuen Qu.

122ste Aufg. ABCD Fig. 96 ist ein Qu. — Es wird vom W. C aus eine L. nach dem dritten Theile der S. AB, nach E gezogen. Wie groß ist das Quadrat EFGC dieser L. CE?

Die Auflösung ist ganz die vorige. Denn, wenn man durch die Ecken F und G zwei Linien HK gll. mit AB und IK gll. mit AC zieht, und die Seiten AB und AC so weit verlängert, bis sie diese Linien in I und H schneiden, so wird AIKH ein Qu., und die vier Dr. ACE, IEF, KFG und HGC sind einander gleich. Darum ist $CH = AE$, folglich $AH = \frac{4}{3}$ AC, und das Qu. $AHKI = \frac{16}{9}$ des Qu. ABCD. — Nun ist Dr. $ACE = \frac{1}{6}$ des Qu. ABCD, alle vier Dr. daher $= \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Werden diese abgezogen von $\frac{16}{9}$, so bleibt für das Qu. EFGC $\frac{10}{9}$ des Qu. ABCD, oder EFGC hat 10 Theile wie ABCD 9.

Wäre $AE = \frac{1}{4}$, so wäre $AH = \frac{5}{4}$, das Qu. $AHKI = \frac{25}{16}$, das Dr. $ACE = \frac{1}{8}$, alle vier Dr. $= \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$, und daher das Qu. $EFGC = \frac{17}{16}$.

g) Eine von einer S. nach der gegenüber liegenden Seite gezogene L. wird S. des neuen Qu.

123ste Aufg. In Fig. 97 sey die L. EF von $\frac{1}{4}$ CD nach $\frac{1}{2}$ AB gezogen. Wie groß ist das Qu. der L. EF?

Die Aufgabe wird wie die vorige gelöst. Man ziehe die L. CG gll. mit EF; dann sind beide gleich. Nun ist $CE = GF$, daher ist $AG = \frac{1}{4}$ AB. Man braucht also nur das Qu. der L. CG zu berechnen, so hat man damit das Qu. der L. EF.

Haben die Kinder alles Bisherige sich wohl zu eigen gemacht, so kann es keinen Fall mehr geben, den sie nicht sollten lösen können, man mag die L. in Quadrate ziehen wie man will.

Daß es auch hier möglich ist, das Verhältniß der gezogenen L. zu den S. des Qu. zu bestimmen, sobald die Kinder die Quadratwurzel ausziehen können, ist für sich deutlich, und es bedarf darüber wohl keiner näheren Anweisung, da das Verfahren ganz wie vorher bei den Dr. ist.

XXIX. Stufe. Folgerungen aus dem Vorhergehenden. Der Pythagoräische Lehrsatz.

124ste Aufg. Lhr. (indem er Fig. 96 an die Tafel zeichnet.) Ich hätte die Aufgabe, welche ich hier durch diese Figur angedeutet habe, auch so stellen können: Wie groß ist

in einem r. W. Dr. ACE das Qu. derjenigen Seite, welche dem r. W. gegenüber liegt? Wir hätten dieses dann mit dem Qu. der S. AC verglichen. Wer kann mir dies nun im Allgemeinen angeben, ganz ohne Rücksicht darauf, ob AE $\frac{1}{3}$ oder was sonst für eine Größe habe? — Wiederholt mir zuerst, wie ich verfahren muß, um das Verhältniß des Qu. der S. CE zu finden.

Kdr. Ich muß zuerst das Qu. der Seite AH suchen.

Lhr. Wie groß ist AH?

Kdr. So groß als AC + CH.

Lhr. Wie groß ist aber CH?

Kdr. So groß als AE.

Lhr. Wir wollen den letzten Ausdruck gebrauchen.

Kdr. Ich muß zuerst das Qu. von AC + AE suchen.

Lhr. Wenn ich nun gar keine Buchstaben hingesetzt hätte, wie würdet ihr da die Linien bezeichnen?

Kdr. Ich muß die beiden Seiten, welche den r. W. einschließen, zusammensetzen und davon das Qu. suchen.

Lhr. Gut. Was muß ich dann thun?

Kdr. Dann ziehe ich viermal das Dr. ACE davon ab.

Lhr. Aber wenn keine Buchstaben dabei ständen?

Kdr. Ich muß viermal den Inhalt des gegebenen rwkl. Dreiecks davon abziehen.

Lhr. Gut. Doch können wir dies noch anders ausdrücken. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Vierecks. Zwei gleiche Dr. werden also so viel seyn, als ein Viereck. Welche Seiten wird ein solches Viereck haben? —

Kdr. Zwei gll. S. wie AC, und zwei gll. S. wie AE.

Lhr. Bezeichnet es wieder ohne Buchstaben.

Kdr. Die Seiten werden seyn wie die L., welche im gegebenen Dr. den r. W. einschließen.

Lhr. Gut. Ein solches Viereck haben wir hier in unserer Figur, nemlich CHGD; ist noch ein zweites vorhanden?

Kdr. Ja, BDLI.

Lhr. Ist dies eben so groß als das vorige?

Kdr. Ja, denn BD = CD, und Bl = CH.

Lhr. Richtig; darum sind beide Vierecke gleich. Das Viereck CDGH ist so groß als zwei Dreiecke, darum ist das

Viereck BDLI ebenfalls so groß als zwei Dreiecke, alle beide Vierecke sind daher so groß als vier Dreiecke. Wenn ich nun nicht die vier Dreiecke abziehen will, was kann ich statt ihrer nehmen? — Kdr. Zwei Vierecke.

Lhr. Wie groß sind diese?

Kdr. Sie haben zu Seiten diejenigen Seiten des gegebenen Dr., welche den rechten W. einschließen.

Lhr. Wird dann eben so viel übrig bleiben, als wenn ich die vier Dr. wegnehme?

Kdr. Ja, denn ich habe ja vom großen Qu. gleich viel weggenommen.

Lhr. Wenn ich nun hier (auf die Fig. zeigend) vom großen Qu. AIKH die vier Dr. wegnehme, was bleibt übrig?

Kdr. Das Qu. CEFG.

Lhr. Und was bleibt übrig, wenn ich von demselben Qu. die beiden Vierecke wegnehme?

Kdr. Die beiden Qu. ABCD und DGKL.

Lhr. Was folgt daraus?

Kdr. Daß das Qu. CEFG gleich ist den beiden Qu. ABCD und DGKL zusammen genommen.

Lhr. Richtig! Aber ist denn DGKL ein Qu.?

Kdr. Ja; denn DL = BI = AE, und DG = CH = AE.

Lhr. Wenn nun keine Buchstaben da wären, wie würdet ihr das Gefundene: daß das eine Qu. so groß sey als die beiden andern zusammen genommen, ausdrücken?

Kdr. In einem rwkl. Dr. ist das Qu. derjenigen S., welche dem rechten W. gegenüber liegt, so groß als die beiden Qu. derjenigen S., welche den r. W. einschließen, zusammen genommen.

Lhr. Richtig! Die Seite, welche dem r. W. gegenüber liegt, nennt man auch die Hypothenuse; die andern Seiten, welche den r. W. einschließen, heißen Catheten. Man kann daher auch sagen: das Qu. der Hypothenuse ist gleich der Summe der Qu. der Catheten. Man nennt diesen Lehrsatz vom Pythagoras, der ihn vor mehr als 2000 Jahren schon aufstellte, den Pythagoräischen Lehrsatz.

XXX. Stufe. Fortsetzung. Andere Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz.

Lhr. Da der vorige Satz für Jeden, der in der Größenlehre weitere Fortschritte machen will, ein sehr wichtiger Satz ist, so wollen wir ihn noch auf anderem Wege zu erweisen suchen.

125ste Aufg. Hier in Fig. 98 sey BAE ein rwkl. Dr. Ich mache das Qu. der S. AB, nemlich ABCD. CH mache ich = AE, und mache nun das Qu. CFGH, so ist dieses Qu. = dem Qu. von AE. Die beiden Qu. sind daher Qu. welcher Seiten? —

Kdr. Es sind die Qu. der Catheten.

Lhr. Richtig! Ich ziehe die L. EG, wie groß ist diese?

Kdr. Sie ist gleich der Hypothenuse EB.

Lhr. Warum?

Kdr. Das wissen wir aus den vorigen Aufgaben. Das Dr. EFG ist = dem Dr. BAE.

Lhr. Gut. Und EF? —

Kdr. Ist = AC oder BD.

Lhr. Ich nehme jetzt das Dr. EFG weg, und lege es so, daß die S. EF mit BD zusammen fällt, der Punkt F an D; das Dr. ABE lege ich so, daß AB mit DH zusammen fällt, den Punkt A an H, dann entsteht diese Fig. (er zeichnet Fig. 99). Was ist es für eine?

Kdr. Ein Qu. — Denn BK = EG, weil es dieselbe L., und eben so GK = EB. Auch sind die Winkel r. W., weil W. EBK aus denselben W. zusammengesetzt ist als W. ABD u. s. w.

Lhr. Von welcher S. ist es das Quadrat?

Kdr. Von der Hypothenuse EB.

Lhr. Das Qu. in Fig. 99 hat also denselben Flächenraum als die beiden Qu. in Fig. 98. Was folgt daraus?

Kdr. Daß das Qu. der Hypothenuse gleich ist den beiden Qu. der Catheten zusammen genommen.

Lhr. Sehr leicht ist der Beweis, wenn das Dr. ein rwkl. glsch. Dr. ist. Hier (er zeichnet Fig. 83, Taf. VII) ist ABC ein solches Dr. — Der W. d ist ein r. W. — S. AB =

BC. Ich mache die Qu. aller Seiten. Von welcher Seite ist Qu. ACED das Qu.?

Kdr. Das Qu. der Hypothenuse.

Lhr. Und die beiden anderen Qu.? —

Kdr. Sie sind die Qu. der Catheten.

Lhr. Wer kann beweisen, daß das Qu. der ersten so groß ist, als diese letzteren beiden? —

Kdr. Wir ziehen die L. IA, dann ist Dr. IAB = Dr. CAB. Denn weil BC = AB, IB = AB, so ist IB = BC. Bei c und d sind r. W., S. AB ist beiden gemeinsch., daher sind zwei Seiten und der eingeschlossene W. gleich. — Jetzt ziehen wir die L. AE, dann ist das Dr. ACE = Dr. CAI. — Denn weil AC = CE, so ist auch W. CAE = W. CEA, und weil W. ACE ein r. W., so ist jeder der beiden andern W. ein halber r. W. — Weil nun IA = AC, W. IAC aber = 2 . $\frac{1}{2}$ r. W., so sind die W. im Dr. IAC = den Winkeln im Dr. ACE. Beide haben noch die S. AC gemein. Daher sind beide Dr. gleich. Es ist aber das Dr. IAC = dem Qu. HIBA, denn beide bestehen aus 2 gl. Dr.; folglich ist auch das Dr. ACE = dem Qu. HIBA, und weil das Dr. ADE = Dr. ACE, das Qu. BFGC = dem Qu. HIBA, so ist auch Dr. ADE = dem Qu. BFGC, folglich das Qu. der Hypothenuse = der Summe der Quadrate der Catheten.

Lhr. Auch mit den Hülfslinien, wie ich sie hier zeichne (er zeichnet Fig. 84, Taf. VII an die Tafel), konnten wir den Satz beweisen. Um ihn jedoch für alle Fälle geltend zu machen, wollen wir das Dr. ungls. machen, AB ist größer als BC. Ich verlängere beide L. nach M und R, ziehe dann durch die Ecken des Qu. D und E mit ihnen die gll. L. MN und NR. Was ist MNRB für eine Figur? — Kdr. Ein Qu.

Lhr. Und wie verhalten sich die 4 Dr. AMD, DNE, ERC und CBA?

Kdr. Sie sind gleich groß.

Lhr. Ich ziehe die L. AL gll. mit BC, und CL gll. mit AB, so wird ALBC ein Rechteck, und Dr. ALC = Dr. ABC. Verlängere ich nun HI und GF, bis sie einander schneiden, so ist HLGK ein Qu. — Wer will es beweisen? — Kdr. HL = KG.

Lhr. Erst muß bewiesen werden, daß HL eine gerade Linie ist.

Kdr. AL geht gll. mit BC, und HA auch, weil die W. W. HAB und b = sind, nemlich r. W.

Lhr. Eben so ist es auch mit GL. — Nun weiter.

Kdr. HA = HI, AL = FG = CG = IK, darum ist HA + AL = HI + IK, und daher auch HL = HK. Bei H und G sind r. W., daher sind alle 4 r. W., folglich ist das Ganze ein Qu.

Lhr. Ist es gleich dem Qu. MBRN?

Kdr. Ja; denn MA = BC = CG = IK, darum ist BA + AM = HI + IK, folglich sind beide Qu. gleich.

Lhr. Ist IBFK = ABCL?

Kdr. Ja; denn IB = BA, und BF = BC.

Lhr. Ich ziehe die L. IF, dadurch theile ich das Viereck in zwei gleiche Dr. Jedes wird so groß seyn als ABC.

Jetzt gebt wohl Acht!

Wenn ich von dem großen Qu. BMNR die 4 Dr. ABC, ADM, DEN, CER abziehe, was bleibt übrig?

Kdr. Wenn ꝛc. so bleibt übrig Qu. ACED oder das Qu. der größten S. des Dr. ABC.

Lhr. Wenn ich nun von dem großen Qu. HLGK die 4 Dr. ABC, ACL, IFB, IFK abziehe, was bleibt sodann übrig?

Kdr. Dann bleiben die Qu. HABI, BCFG oder die Qu. der beiden kl. S. des Dr. ABC übrig.

Lhr. Sind nicht alle jene Dr. gleich? — Kdr. Ja!

Lhr. Waren nicht auch die beiden großen Qu. BMNR und KHLG einander gleich? — Kdr. Sie waren gleich.

Lhr. Was habe ich also gethan, indem ich von jedem der großen Qu. 4 Dr. abzog?

Kdr. Gleiches von Gleichem abgezogen; es bleibt also Gleiches übrig; folglich ist der Inhalt des Qu. der größten S. = der Summe des Inhalts der beiden kleinen S.

Lhr. Also:

Der Inhalt des Qu. auf der gr. S. eines rwkl. Dr. ist = der Summe des Inhalts der beiden Qu. auf der mittleren und kl. S. desselben.

Es giebt indessen noch einen andern Beweis; ich will die Figur mit 2 H. L. an die Tafel zeichnen; wer wird ihn finden? (Auf Fig. 85a zeigend.) Ich ziehe nemlich H. L. CF und AD. Werden die dadurch entstandenen Dr. ADB und CFB = seyn?

Kdr. Beide Dr. sind gl.; denn W. c ist sich selbst gl.; W. a = b (als r. W.) also a + c = b + c, oder die beiden st. W. in beiden Dr. gl.

Auch die beiden S., die diese st. W. einschließen, sind in beiden Dr. gleich; denn S. BD = S. BC (als S. des nemlichen Qu.) S. BA = S. BF (gleichfalls als S. eines und desselben Qu.), folglich sind die ganzen Dr. CFB und ADB gleich.

Lhr. Ich ziehe nunmehr AI gll. mit BD; was für eine Fig. wird dann BDLM seyn? — Kdr. BDLM ist ein Pgr.

Lhr. Jetzt faßt dieses Pgr. BDLM und das Dr. ADB genau ins Auge!

Kdr. Dr. ADB hat mit dem Pgr. MLBD gl. Grund-L. BD und gl. Höhe DL.

Lhr. Was folgt daraus, in Absicht auf den Inhalt?

Kdr. Der Inhalt des Dr. ist = der Hälfte des Inhalts des Pgr.

Lhr. Betrachtet Qu. ABGF und Dr. CFB genau!

Kdr. Beide haben ebenfalls gl. Grund-L. BI, und gl. Höhe FG.

Lhr. Also ist der Inhalt des Dr. CFB = der Hälfte des Inhalts des Qu. ABGF. Größen, deren Hälften einander gleich sind, sind einander selbst gleich. Da nun Dr. ADB = Dr. CFB, Dr. ADB die Hälfte des Pgr. MLBD; Dr. CFB aber = der Hälfte des Qu. ABGF, so haben das Pgr. MLBD und das Qu. ABGF gleichen Inhalt.

(Indem er die nemliche Figur nochmals an die Tafel zeichnet (s. Fig. 85b), aber jetzt aus der vorigen nur die eine H. L. AL aufnimmt, dagegen 2 neue H. L. AE und BK beschreibt.)

Wie steht es mit den beiden Dr. AEC und KBC?

Kdr. Sie sind einander gleich, aus denselben Gründen, wie die beiden Dr. ADB und CFB.

Lhr. Jetzt vergleicht den Inhalt dieser Dr. mit dem des Pgr. MLEC und des Qu. AHKC.

Kdr. Dr. ACE ist dem Inhalte nach $= \frac{1}{2}$ Pgr. MLEC; Dr. KBC $= \frac{1}{2}$ Qu. HAKC.

Lhr. Was folgt daraus?

Kdr. Pgr. MLEC und Qu. HAKC haben gleichen Inhalt.

Lhr. Ist nun der Inhalt des Qu. der gr. S. des Dr. = der Summe des Inhalts der Qu. der beiden kl. S.?

Kdr. Ja, denn der Inhalt des R. E. BDLM = dem des Qu. ABGF; der Inhalt des R. E. MLEC = dem des Qu. AHKC; folglich der Inhalt des ganzen Qu. der gr. S. BDEC = dem des Qu. AHKC + dem Inhalte des Qu. ABFG.

Wer den hier eben gegebenen Beweis verstanden hat, wird den in der 100sten Fig., Tafel XVI angedeuteten sich selbst leicht suchen können. Es kommt bei ihm nur darauf an, zu beweisen, daß $t+s+q+r+p$ oder die beiden Qu. der Catheten gleich sind $t+s'+q'+r''+p'$ oder dem Qu. der Hypothenuse, was sich ohne Mühe findet.

XXXI. Stufe. Auffinden des Verhältnisses des Inhalts der Qu. und R. E., die durch Hülfe verschiedenartiger Th. einer gegebenen L. gebildet werden.

126ste Aufg. Es ist eine L. gegeben und in irgend einem P. getheilt; es frägt sich: Wie sich der Inhalt des Qu. der ganzen L. zu dem Inhalte der beiden R. E. aus einer S. des Qu. und aus einem der beiden Th. der gegebenen L. verhält?

Antw. Der Inhalt des Qu. der ungeth. L. ist = der Summe des Inhalts der beiden aus einer S. des Qu. und aus den beiden Th. der L. gebildeten R. E.

(AB Fig. 86 sey bei C beliebig getheilt.)

Beweis. Qu. ABDE ist auf L. AB beschrieben; R. E. ACDF ist mit dem einen Th. der L. AB, nemlich mit AC,

und mit der S. des Qu. AD, R.E. CBFE mit dem andern Th. der L. AB, nemlich mit CB, und ebenfalls mit einer S. des Qu. BE beschrieben. Da nun S. AB des Qu. ABDE = AC + CB, = den beiden kl. S. der beiden R.E. ACDF und CBFE, S. AB ebenfalls = S. AD und = CF oder = der gr. S. eines jeden der beiden R.E., so ist der Inhalt des Qu. ABDE = dem Inhalte der beiden R.E. ACDF und CBFE.

127ste Aufg. Eine L. ist in 2 Th. getheilt; mit der ungeth. L. und mit einem der beiden Th. derselben ist ein R.E. beschrieben; aus den beiden Th. der L. ist ein 2tes R.E. beschrieben; es frägt sich: Wie sich der Inhalt beider R.E. verhalte?

Antw. Der Inhalt des R.E. aus der ungetheilten Linie und aus einem Theile derselben ist, wenn ich ihn mit dem R.E. aus den beiden Theilen der L. vergleiche, um das Qu. des nemlichen Theils der L. größer, als das letztere R.E.

Beweis. AB (s. Fig. 87) sey die L., die bei E in 2 beliebige Th. getheilt ist; ABDC sey das R.E. aus L. AB und aus dem einen Th. der L. EB = CB; AEDF aber das R.E. aus beiden Th. der L. AB gebildet; so enthält, da L. AB = AE + CB, das R.E. ABDC, das R.E. AEDF + Qu. CBFE, welches das Qu. des Th. der L. AB ist, der = einer S. des R.E. ABDC ist; da nun in dem R.E. AEDF S. AE der eine Theil der getheilten L. AB ist, S. AD aber = EB = dem andern Th. der L., so ist das R.E. aus der ungetheilten L. AB und aus einem Theile derselben, CB um das Qu. dieses Th. gr. als das R.E. aus den beiden Th. der L.

128ste Aufg. Es ist eine L. gegeben und in einem beliebigen P. getheilt; es frägt sich:

Wie sich der Inhalt des Qu. der ungeth. L. zu der Summe des Inhalts der Qu. der beiden Th. der L. verhalte?

Antw. Der Inhalt des Qu. der ungetheilten L. ist immer um 2 R.E. aus den beiden Th. der L. größer, als die Summe des Inhalts der Qu. der beiden Theile.

Bildung der Figur AB, Fig. 88, sey die gegebene L.; sie

sey bei C getheilt; aus C sey gll. mit AD, der einen S. des Qu., L. CG gezogen, sodann S. AD bei I eben so getheilt, wie S. AB bei C; aus dem Th. P. I gll. mit DE, der andern S. des großen Qu., L. IF gezogen.

Beweis. Der Lehrer thue zur Auffindung des Beweises folgende Fragen:

Aus welchen Figuren besteht das gr. Qu. ABDE?

Kdr. Aus 2 kl. Qu. und aus 2 R.E.

Lhr. Sind die beiden kl. Qu. die Qu. der beiden Theile AC und CB der L. AB (oder der S. des gr. Qu.)?

Kdr. Ja; denn da CG mit AD gll. ist, und die W. bei A und D r. W. sind, so ist ACDG ein R.E., das aus den Pgr. ACIH und IGHD besteht; da ferner AD bei I eben so getheilt ist, wie AB bei C, so ist AI = AC; da IF gll. mit AB ist, so ist auch IH gll. mit AC; die W. bei A und I sind r. W.; also ist das Pgr. ACIH ein gls. rwkl., folglich ein Qu.; da ferner AC einer der Th. der L. AB und zugleich S. des Qu. ACIH ist, so ist Qu. ACIH das Qu. des einen Th. (AC) der L. AB.

Lhr. Wird nun das kl. Qu. HFGE das Qu. des andern Th. der L. AB, d. i. der L. CB seyn?

Kdr. Ja; denn IF = AB; IH = AC; also IF — IH = AB — AC; folglich IF — HI = HF; AB — AC = CB; folglich HF = CB.

Ferner, da CH = IH (als S. des nemlichen Qu.), CG = IF (weil CG = AD, IF = DE, beide also als 2 S. des nemlichen Qu. gleich sind), auch CG — CH = IF — IH; mithin HF = HG, und da die W. bei F, E, C, H r. W. sind, HEGF ein Qu.; da ferner die eine S. desselben HF = war CB, oder gleich dem Qu. des andern Th. der L. AB, so ist Qu. HFEG das Qu. dieses andern Th. der L. AB.

Lhr. Nunmehr werdet ihr die Frage bald beantworten können. Sagt mir, aus welchen bekannten L. die beiden R.E., die in dem gr. Qu. noch enthalten sind, gebildet sind?

Kdr. Da in dem einen R.E. CBHF S. CH = AC, S. CB sich selbst gleich ist, so ist daraus klar, daß das R.E. von den beiden Th. der L. AB gebildet ist. Eben so das R.E. IHDG, da IH = AC, HG = HF und HF = CB.

Lhr. Hieraus folgt allgemein:

Der Inhalt des Qu. auf einer gegebenen L. ist um das doppelte R.E. aus den beiden Th. dieser L. gr., als die Summe des Inhalts der Qu. auf den beiden Th. der nemlichen L.

Ferner: In dem Qu. einer gegebenen L. ist immer enthalten:

a) das Qu. des einen Th. der L.

b) das Qu. des andern Th. der L.

c) 2 R.E. aus beiden Th. der nemlichen L.

(Dies stimmt mit der Algebraischen Formel überein $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.)

129ste Aufg. Wie verhält sich das Qu. einer gegebenen L. + dem Qu. eines Th. dieser L. zu dem Qu. des andern Th. der L. + dem zweifachen R.E. aus der gegebenen L. und aus dem ersten Th. derselben?

Bildung der Figur. AB Fig. 89 sey die gegebene L., auf derselben sey Qu. ABFG beschrieben, sie sey in C getheilt, und aus C gll. mit AF Linie CH gezogen; ferner in D ein Stück von AF = AC abgeschnitten, und aus D gll. mit AB L. DI gezogen.

Lhr. Welche Fig. sollen wir hier vergleichen?

Kdr. Wir sollen das Qu. der L. AB, also Qu. ABFG + Qu. ACDE mit den beiden R.E. ABDI und ACFH + Qu. EIHG vergleichen.

Lhr. Richtig! — Also thut das nun wirklich.

Was ist in dem Qu. einer getheilten L., wie AB ist, immer enthalten?

Kdr. Das Qu. des einen Th. + dem Qu. des andern Th. + 2 R.E. aus beiden Th. der L.

Lhr. Nun haben wir hier in der gegebenen Summe schon einmal das Qu. des einen Th. der L. AB, was ist also in dieser Summe enthalten?

Kdr. In der gegebenen Summe ist enthalten:

a) 2 mal das Qu. des 1sten Th.

b) das Qu. des 2ten Th.

c) 2 R.E. aus beiden Th. der L.

Lhr. Damit sollen wir vergleichen:

2 R.E. aus der ganzen L. AB und aus dem 1sten Th. derselben + dem Qu. des 2ten Th.

Was enthält das R.E. aus der ganzen L. und dem 1sten Th. derselben immer?

Kdr. Das R.E. ꝛc. enthält immer das Qu. dieses Th. + dem R.E. aus demselben, und aus dem andern Th. (s. die 116te Aufg.)

Lhr. Was enthält also die 2te Summe?

Kdr. Die 2te Summe enthält:

a) 2 mal das Qu. des 1sten Th. der L. AB.

b) das Qu. des 2ten Th. der nemlichen L.

c) 2 mal das R.E. aus beiden Th. der L. AB.

Also sind beide gegebene Summen des Inhalts der Figuren gleich.

Lhr. Es folgt hieraus allgemein:

Wenn eine L. in irgend einem P. getheilt ist, so ist das doppelte Qu. des einen Th. + dem einfachen Qu. des andern Th. + dem doppelten R.E. aus beiden Th. = dem Qu. des andern Th. + dem doppelten R.E. aus der ganzen gegebenen L. und aus dem 1sten Th. derselben.

130ste Aufg. Eine gerade L. ist in 2 gl. und zugleich in 2 ungl. Th. getheilt; es frägt sich: Wie sich die Summe des Inhalts der Qu. auf den gl. Th. der L. zu der Summe des Inhalts der Qu. auf den beiden ungl. Th. der nemlichen L. verhalte?

(Der Lehrer zeichne L. AH, Fig. 90, theile dieselbe zuerst bei C in 2 gl. Th., dann bei O in 2 ungl. Th., beschreibe sodann auf jedem dieser Th. Qu., nemlich auf den beiden gl. Th. CB und CA die Qu. CBDE, CAFD, auf den ungl. Th. OB und OA die beiden Qu. BOGH und AOIK. Sodann frage er: Was für Figuren haben wir hier vor uns?

Kdr. 2 Qu. und 3 R.E.

Lhr. Welche Fig. gehören den Qu. der gl. und der ungl. Th. der L. gemeinschaftlich an?

Kdr. Die beiden Qu. und das R.E. COND gehören beiden gemeinschaftlich.

Lhr. In welchen Fig. zeigt sich der Unterschied zwischen den beiden Summen des Inhalts der Qu.?

Kdr. In den beiden R.E. **NEHG** und **IKFN**.

Lhr. Sind beide gleich groß?

Kdr. Nein, das R.E., das zu den Qu. der ungl. Th. gehört, muß immer gr. seyn, als das R.E., das zu den Qu. der gl. Th. gehört.

Lhr. Beweiset es?

Kdr. Das R.E., das zu den Qu. der ungl. Th. gehört, wird gebildet durch eine L. (**NE**) = dem gr. der beiden ungl. Th., also gr. als die S. eines der Qu. der gl. Th. und durch eine L. (**NG**) = dem Unterschiede zwischen einem gl. und einem ungl. Th. der L.

Das R.E. aber, das zu den Qu. der gl. Th. gehört, wird durch die letztere L. (**NK** = **NG** = dem Unterschiede eines gl. und eines ungl. Th.) und durch den kleinsten der beiden ungl. Th. gebildet, d. h. durch **IK**.

Lhr. Woher wißt ihr, daß **KN** = **NG** ist?

Kdr. **NG** = dem Untersch. zwischen einem gl. Th. **CB** und dem größten der beiden ungl. Th. (**OB**) der L. **AB**, **KN** = dem Unterschiede zwischen einem gl. Th. **AC** und dem kleinsten der beiden ungl. Th. (**AO**) der nemlichen L. **AB**.

Da nun der kl. der beiden ungl. Th. der L. **AB** um eben so viel kl. ist als einer der gl. Th., als um wie viel der gr. Th. der nemlichen L. **AB** gr. ist als einer der gl. Th., so sind beide L. **KN** und **NG** einander gl.

Lhr. Also können wir das kl. R.E. **IKFN** in das gr. R.E. **NEHG** tragen. (s. das R.E. **NLGM**.)

Um was für ein R.E. wird nun das R.E., das zu den Qu. der ungl. Th. gehört, immer gr. seyn als das R.E., das zu den Qu. der gl. Th. gehört? Oder, um was für ein R.E. wird die Summe des Inhalts der Qu. der ungl. Th. einer L. gr. seyn müssen, als die Summe der Qu. der beiden gl. Th. der nemlichen L.

Kdr. Um das R.E. **LEHM**.

Lhr. Nein; ich will es mit Worten beschrieben haben, so daß es für alle Fälle paßt, nicht blos auf diese Fig. hier.

Kdr. Also: Die Summe des Inhalts der Qu. der ungl. Th. einer L. ist immer um ein R.E. aus einer L. = dem Untersch. der beiden ungl. Th., und

aus einer L. = dem Unterſch. zwiſchen einem der gl. und einem der ungl. Theile größer, als die Summe der Quadrate der beiden gl. Th. der nemlichen Linie.

Lhr. Richtig!

131ſte Aufg. Wie verhält ſich der Inhalt des Qu. auf der größten S. eines ſtwkl. Dr. zu der Summe des Inhalts der Qu. auf den beiden kl. S.?

ABC Fig. 91 ſey das gegebene ſtwkl. Dr.; ich verlängere den einen Sch. des ſt. W., z. B. CB, und ziehe aus dem Sch. P. des W., der dieſer Verlängerung gegenüber liegt, aus A, auf dieſelbe eine rwkl. L. AD.

Lhr. Was für ein Dr. iſt Dr. ADC?

Kdr. Dr. ADC iſt ein rwkl. Dr.

Lhr. Welchen Qu. iſt das Qu. der L. AC (der größten im Dr. ACD) dem Inhalte nach gleich?

Kdr. Qu. AC = Qu. AD + Qu. DC.

Lhr. Da hätten wir nun die Qu. der einen S. des gegebenen ſtwkl. Dr. ABC, nemlich der S. AC, beſtimmt. — Qu. CB iſt ſich ſelbſt =, was für ein Dr. iſt nun Dr. ABD?

Kdr. ABD iſt ein rwkl. Dr.

Lhr. Welchem Qu. iſt alſo das Qu. AB der gr. S. dieſes Dr. ABD =?

Kdr. Qu. AB = Qu. AD + Qu. DB.

Lhr. Da S. DB bei C getheilt iſt, ſo frägt ſich weiter, wem Qu. DB gleich iſt?

Kdr. Qu. DB = Qu. DC + Qu. CB + 2 R.E. aus DC und CB (ſ. die 117te Aufg.).

Lhr. Jetzt wollen wir zuſammen ſtellen, was wir gefunden haben.

Qu. AC = Qu. AD + Qu. DC, Qu. CB = Qu. CB. Alſo die Summe der Qu. der beiden kl. S. des Dr. = Qu. AD + Qu. DC + Qu. CB. Nun iſt Qu. AB = Qu. AD (+ Qu. DB =) + Qu. DC + Qu. CB + 2 R.E. aus DC und CB.

Was bleibt alſo übrig, wenn ich die Summe des Qu. der beiden kl. S. von dem Qu. der gr. S. des ſtwkl. Dr. abziehe?

Kdr. Wenn ꝛc. ſo bleiben 2 R.E. übrig, die aus einer

der kl. S. und aus ihrer Verlängerung bis dahin, wo sie mit einer aus dem End-P. der unverlängerten S. gezogenen L. einen der gr. S. gegenüberstehenden r. W. bildet, gebildet sind.

Lhr. Hieraus folgt also allgemein:

In jedem stwkl. Dr. ist das Qu. der dem st. W. gegenüberstehenden S. um das doppelte R.E., das aus einem der Sch. dieses W. und aus der Verlängerung desselben bis dahin, wo eine aus dem Sch. P. des ihm gegenüberstehenden W. auf diese L. rwkl. gezogene L. sie trifft, größer als die Summe der Qu. der beiden kl. S.

132ste Aufg. Wie verhält sich in einem spwkl. Dr. das Qu. einer S., die einem der sp. W. gegenüber steht, zu der Summe der Qu. der beiden andern S.?

Bildung der Figur. **ABC** Fig. 92 sey das spwkl. Dr.; aus dem Sch. P. des W. bei **C** ist auf die ihm gegenüberstehende S. **AB**, deren Qu. mit den Qu. der beiden andern S. verglichen werden soll, eine rwkl. L. **CD** gezogen.

Auflös. Die beiden Dr. **ACD** und **CBD** sind rwkl., also Qu. **AC** = Qu. **CD** + Qu. **AD**. Da die L. **AB** bei **D** geth. ist, so ist Qu. **AB** + Qu. **AD** (Aufg. 129) = Qu. **DB** + 2 R.E. aus **AB** und **AD**. Also Qu. **AB** + Qu. **AD** + Qu. **AC** = Qu. **DB** + Qu. **CD** + Qu. **AD** + 2 R.E. aus **AB** und **AD**. — Da ferner Qu. **CB** = Qu. **CD** + Qu. **DB**, so bleiben, wenn ich den Betrag des Qu. **CB** + Qu. **AD**, das ich Anfangs nur zu Hülfe genommen hatte, mithin die 3 Qu. **CD**, **DB**, **AD** von der Summe der Qu. der beiden S. **AC** und **AB** abziehe, also von Qu. **DB** + Qu. **CD** + Qu. **AD** + 2 R.E. aus **AB** und **AD**, diese beiden R.E. übrig. Es folgt also:

In jedem Dr. ist das Qu. derjenigen S., die einem sp. W. gegenüber liegt, kleiner, als die Qu. der S., die diesen W. einschließen, und zwar um zwei R.E. aus einer der beiden S., die den W. einschließen, und aus dem Th. dieser S., der zwischen dem Sch. P. des W. und einer auf derselben rwkl. gezogenen L. liegt.

133ste Aufg. Es sey eine L. gegeben, und dieselbe sey

willkührlich verlängert; aus der verlängerten L. und aus ihrer Verlängerung sey ein R. E. beschrieben; ferner sey auf einer L., gleich der Hälfte der gegebenen L. + der Verlängerung derselben, ein Qu. beschrieben, es frägt sich: Wie sich der Inhalt beider Figuren verhalte?

Bildung der Figur. AB Fig. 93 sey die gegebene L.; sie sey bis D verlängert, also BD die Verlängerung; AB sey bei C gl. geth., R. E. ADEF sey das Pgr., das aus der verlängerten L. AD und aus der Verlängerung BD gebildet ist. Auf CD = der Hälfte der L. AB + der Verlängerung derselben BD sey Qu. CDGH beschrieben, das mit R. E. ADFE verglichen werden soll. Aus B sey gll. mit CG und DH eine H. L. BI gezogen.

Lhr. Welches R. E. ist beiden Figuren gemein?

Kdr. R. E. CDKE ist beiden gemein.

Lhr. Welche Figuren müssen wir also in Hinsicht ihres Inhalts vergleichen?

Kdr. R. E. ACFK mit R. E. KEGH.

Lhr. Woraus besteht R. E. KEGH?

Kdr. Aus den beiden Pgr. KLGI und LEIH.

Lhr. Diese beiden Pgr. wollen wir nun näher betrachten! Was war L. CB?

Kdr. L. CB = der Hälfte der L. AB.

Lhr. Es frägt sich: Ist Pgr. KLGI ein Qu.?

Kdr. Ja, denn CDGH ist ein Qu., KE = CD (einer S. des Qu.), BI = DH (einer 2ten S. des nemlichen Qu.), BL = LE; denn da der W. bei D ein r. W. ist, S. BD = DE (nach der Bildung der Figur), so ist BDLE ein Qu., also BL und LE als S. des gl. Qu. gleich.

Folglich KE — LE oder S. KL = BI — BL oder S. LI. Die W. bei K, L, G, I r. W., also KLGI ein Qu., und da KL = CB (= der Hälfte der L. AB), so ist Qu. KLGI das Qu. dieser Hälfte.

Lhr. Nun wollen wir R. E. LEIH mit R. E. ACFK vergleichen. — Sind beide gleich?

Kdr. Beide R. E. sind gl.; denn S. LI = KL, als S. eines Qu., KL war = CB, CB = AC (als Hälften der L. AB) mithin auch LI = AC. Ferner L. DE = AF,

als gll. S. des nemlichen Pgr. ADFE; DE = EL, als S. des nemlichen Qu., also auch EL = AF; ferner sind alle W. beider Pgr. r. W., mithin Pgr. LEIH und Pgr. ACFK aus gl. S. gebildet, die unter gl. W. zusammen kommen, folglich beide gl.

Lhr. Nunmehr werdet ihr die Hauptfrage der Aufg. beantworten können; — aber in allgemeinen Ausdrücken, die auf alle ähnliche Fälle passen?

Ein Kd. Das Qu., das auf der Hälfte einer gegebenen L. + ihrer Verlängerung beschrieben wird, ist um das Qu. der Hälfte der gegebenen L. größer, als ein R.E., das aus der verlängerten L. und ihrer Verlängerung gebildet worden ist.

134ste Aufg. Man soll eine gegebene L. so theilen, daß ein R.E. aus der ganzen L. und aus dem einen Th. derselben = sey dem Qu. des andern Th. der L.

Bildung der Figur. AB Fig. 94 sey die gegebene L. Ich beschreibe auf derselben ein Qu. ABCD, theile die eine der mit der gegebenen L. verbundenen S., z. B. AC bei E, in 2 gl. Th., ziehe aus dem gegenüber stehenden W. des Qu., dessen Sch. die L. AB ist, also aus B, L. BE nach diesem M.P. E der S. AC. Sodann verlängere ich die S. AC aus A so, daß die L. EA + der Verlängerung derselben, AI = L. BE werde. Auf der Verlängerung AI beschreibe ich sodann ein Qu. AIGH, und verlängere S. GH bis an S. DC, also bis K.

Der P. H, wo diese L. GK die gegebene L. AB schneidet, ist der verlangte P., durch welchen L. AB so getheilt wird, daß Qu. AHGI = wird dem R.E. aus AB und BH.

Beweis. Da L. CA bei E in 2 gl. Th. getheilt ist, und da AI die Verlängerung der L. AC ist, so ist (nach der 122sten Aufg.) ein R.E. aus CI und AI = dem Qu. auf AE = dem Qu. auf EI; und da EI = BE, auch = Qu. BE. Nun ist der W. a ein r. W., daher Qu. EB = Qu. AB + Qu. AE. Folglich das R.E. aus CI und AI + Qu. AE = den Qu. AB + Qu. AE (s. 120ste Aufg.). Nehme ich von beiden Größen Qu. AE hinweg, so habe ich Gl. von Gl. hinweg genommen; es bleibt also Gl. übrig, mithin ist R.E. AI × CI = Qu. AB.

Folglich ist, wenn man vom R.E. **GICK** und vom Qu. **ABCD**, die gleichen Inhalt haben, das beiden gemeinschaftliche R.E. **AHKC** hinwegnimmt, Qu. **AIGH** = R.E. **BHDK**. Da nun **BD** = **BA**, so ist R.E. **BHDK** das verlangte, aus der gegebenen L. und aus einem Th. derselben, und da Qu. **AIGH** das Qu. der L. **HA** oder des andern Th. der gegebenen L. **AB** ist, so ist dasselbe ebenfalls das verlangte; beide dem Inhalte nach gleich; folglich ist die Aufg. gelöst.

XXXII. Stufe. Gleichheit oder Ungleichheit des Inhalts zweier Dr., Pgr. u. s. w. verschiedener Art bei Gleichheit der Summe aller oder einiger Seiten.

Lhr. Man nennt die Summe der S. einer Figur ihren Umfang. Wir wollen den Inhalt einiger Fig. von gleichem Umfange untersuchen.

135ste Aufg. Zwei Dr., ein glsch. und ein unglsch., haben einen W. und die Eigenschaft, daß die Summe der beiden gl. S. des glschl. Dr., die diesen W. einschließen, = ist der Summe der beiden S., die den nemlichen W. in dem unglsch. Dr. einschließen; es frägt sich:

1) ob sie beide gleichen Umfang haben?
2) ob ihr Inhalt gleich oder ungleich ist?

Bildung der Figur. Dr. **ABC** (s. Fig. 96) sey das glsch. Dr., W. **x** der beiden Dr. gemeinschaftliche W. Man schneidet von dem einen der gl. Sch., z. B. von **BA**, ein Stück, **DB**, ab, und verlängert dagegen den andern Sch., **AC**, um ein eben solches Stück, um **CE**; sodann ziehe man von **D** nach **E** eine L., so ist Dr. **ADE** ein ungleichseitiges Dr., das die verlangte Eigenschaft hat, nemlich, daß die Summe der beiden S., die den W. einschließen, den es mit dem glschl. Dr. gemein hat, = ist der Summe dieser beiden gl. S. Es frägt sich zuerst:

Sind die Dr. **ABC** und **ADE** von gl. Umfange?

Lhr. Welche S. müssen wir in beiden Dr. vergleichen, um das zu finden? — Kdr. S. **DE** mit der S. **BC**.

Lhr. Richtig! Um dies zu finden, müssen noch einige

H. L. gezogen werden, nemlich gll. mit AE L. DH; sodann muß S. BC um ein St. = BH oder um CG verlängert werden; ferner muß die L. GE gezogen werden. Ihr seht hier nun 2 kl. Dr., CGF und BHD; könnt ihr mir sagen, ob beide gleich seyn werden?

Kdr. Sie sind gleich; denn S. BH = S. CG; S. BD = S. CE; W. n = o (weil ABC ein glsch. Dr. AB und AC die gl. Sch. sind.)

W. n = m; also auch W. m = o. Also in beiden Dr. ein W., und die beiden S., die ihn einschließen, gl.; also die ganzen Dr. gl.

(Es läßt sich noch ferner beweisen, daß beide Dr. glsch. sind; sollten die Kinder nicht von selbst darauf kommen, so sage er ihnen:)

DH gll. mit CE, also W. a = n als äußerer G. W., also auch, da o = n, a = o, mithin Dr. BDH ein glsch. Dr. — Welches sind die gleichen Sch.?

Kdr. BD und HD.

Lhr. Ist nun Dr. CGE auch ein glsch. Dr.?

Kdr. Ja, denn es ist dem glsch. Dr. BHD gleich.

Lhr. Jetzt gebt wohl Acht! Wir wollen in den beiden kl. Dr. aus den Sch. P. der W., die von den gl. S. eingeschlossen werden, nach der gegenüberstehenden S. rwkl. L. ziehen, EI und DK (indem er es wirklich thut), was bewirken diese rwkl. L.?

Kdr. Sie theilen die Dr. in 2 gl. Th.

Lhr. Was für einen Einfluß hat das auf die ungl. S. der beiden Dr. auf CG und BH?

Kdr. Jede dieser ungl. S. wird in 2 gl. Th. getheilt.

Lhr. Richtig; nun sind wir, wo wir seyn wollten. Wir wollen jetzt S. BC mit S. DE vergleichen. Nicht wahr, KB = KH? — Kdr. Ja!

Lhr. Ist KB auch = IC?

Kdr. Ja!

Lhr. Aus welchem Grunde?

Kdr. KB ist die Hälfte von BH. IC ist die Hälfte von CG; BH = CG, also auch die Hälften oder die L. KB und IC gleich.

Lhr. Wenn ich nun L. KB von der S. CB hinwegnehme, dagegen IC ansetze, ist CB = KI?

Kdr. Ja, denn ich habe Gl. hinweggenommen und wieder Gleiches hinzugethan.

Lhr. Was für ein Theil von KI ist KF?

Kdr. KF ist die Hälfte von KI.

Lhr. Sind die L. DF und EF gleich? — Kdr. Ja!

Lhr. Warum?

Kdr. In den beiden Dr. DHF und CEF ist W. q = p, als N. W. gl. W., d = b, als W. W. bei gll. L., S. DH = S. CE (denn DH = DB, DB = CE, also auch DH = CE), also in beiden Dr. eine S. mit beiden an dieser S. liegenden W. gl., folglich die ganzen Dr. gl.

Lhr. Richtig, also jetzt auch S. DF = S. FE, mithin jede = der Hälfte der L. DE; womit sollten wir DE vergleichen?

Kdr. Wir sollten DE mit BC vergleichen.

Lhr. Das wollen wir jetzt thun. DF = $\frac{1}{2}$ DE; KF = $\frac{1}{2}$ KI oder BC. — Seht jetzt das Dr. DKF genau an; — was werdet ihr finden?

Kdr. S. DF ist gr. als S. KF. Denn W. r ist ein r. W., die S. DF steht dem r. also dem gr. W. gegenüber, mithin ist sie gr. als KF.

Lhr. Was folgt nun daraus, daß die Hälfte der S. DE gr. ist, als die Hälfte der S. BC?

Kdr. Daraus folgt, daß die ganze S. DE gr. ist, als die ganze S. BC.

Lhr. Welches Dr. hat nun wohl einen gr. Umfang, d. h. bei welchem ist die Summe der S. gr., bei ABC oder bei ADE?

Kdr. Dr. ADE hat einen gr. Umfang.

Lhr. Also wird auch wohl Dr. ADE mehr Inhalt haben, als Dr. ABC? Untersucht das jetzt.

(Die Kinder werden sogleich sehen, daß der Inhalt des Dr. ABC der gr. ist; sollten sie nicht von selbst darauf kommen, so fahre er fort:)

Wir haben eben gesehen, daß Dr. DHF = Dr. CEF, folglich ist der Inhalt des Tr. ACDH = dem Inhalte des Dr. ADE; nun ist aber der Inhalt des Dr. ABC um den In-

halt des kl. Dr. BHD gr. als Dr. ACDH, also auch gr. als Dr. ADE.

136ste Aufg. Ist der Inhalt eines Qu., oder der eines R.E. bei gleichem Umfange, der gr.?

Antw. Der Inhalt des Qu. ist der größere.

Auflös. ABCD (Fig. 97) sey das Qu. Ich theile eine S. desselben, z. B. AC, bei G in 2 Th., verlängere nun irgend eine S. des Qu. um den einen Th., z. B. um BE = GC, so giebt mir diese verlängerte S. AE die eine S. des R.E., der übrig bleibende Th. von AC, oder der geth. S. des Qu. oder AG, die andere S. des R.E. Also ist nunmehr S. AE = AB + GC; S. GF = CD + DH; S. AG sich selbst gleich; S. EF = BH; mithin der Umfang des R.E. AEGF = dem Umfange des Qu. ABCD; allein in Absicht auf den Inhalt ist das Qu. um den Untersch. der beiden R.E. GHCD und BEHF oder um das Qu. des Untersch. zwischen der S. des Qu., und einer S. des R.E., um Qu. IHKD gr., als R.E. AEGF.

Lhr. Beweiset es!

Kdr. Wir wollen den Inhalt des Qu. ABCD und des R.E. AEGF vergleichen. R.E. ABGH ist beiden gemein. Das R.E. AEGF enthält, außer dem R.E. ABGH, auch noch das kl. R.E. BEHF; das Qu. ABCD enthält außer dem R.E. ABHG noch das R.E. GHCD; wir dürfen also nur die beiden R.E. BEHF und GHCD vergleichen, S. BE = S. GC; allein S. GH ist um IH, oder um den Unterschied zwischen der S. des Qu. ABCD und einer der S. des R.E. AEGF gr. als BH, die andere S. des R.E.; da nun IH = HF, so ist Figur IKHD ein Qu., und zwar das Qu. des Unterschieds zwischen einer S. des Qu. und einer S. des R.E., hieraus folgt:

Wenn ein Qu. und ein R.E. gl. Umfang haben, so ist der Inhalt des Qu. immer um den Inhalt des Qu. des Untersch. einer S. desselben und einer S. des R.E. gr., als der Inhalt dieses R.E.

Lhr. Aus allen dem, was bis jetzt über die Vergleichung des Inhalts mit dem Umfange vorgekommen ist, folgt nunmehr allgemein:

Unter 2 Fig. von gl. Umfange hat die Figur mit gl. S. und mit gl. W. immer einen gr. Inhalt, als die mit ungl. S. und ungl. W. Es haben also alle regelmäßige Fig., bei gl. Umfange, einen größern Inhalt als die unregelmäßigen.

IV. Abschnitt. Der Kreis.

XXXIII. Stufe. Aufsuchung und Benennung der verschiedenen geraden Linien, die in Beziehung auf den Kreis und dessen Mittelpunkt gezogen werden können.

Lhr. (Indem er einen Kreis an die Tafel zeichnet.) Wie nennen wir diese L. hier?

Kdr. Es ist eine Kreis-Linie oder ein Kreis.

Lhr. Jeder von euch zeichne jetzt einen Kreis auf seine Tafel! (nachdem es geschehen) nunmehr wollen wir mit diesem Kreise eine gerade Linie in Verbindung setzen.

Wer kann mir sagen, auf welche Art dies geschehen kann, in so fern von der Lage der geraden L. die Rede ist?

(Die Kinder werden vielleicht nicht alle richtig antworten, einige aber werden wohl darauf kommen, daß die L. innerhalb des Kreises oder außerhalb desselben gezogen werden kann.)

Lhr. Wir wollen nun zuerst innerhalb des Kr. ziehen. Wer weiß mir noch zu sagen, welcher merkwürdige P. innerhalb des Kr. sich befindet?

Kdr. Es ist der Mittel-Punkt.

Lhr. Richtig! Warum nannte ich diesen P. aber wohl merkwürdig?

Kdr. Weil es der P. ist, von dem jeder P. der Kreis-Linie gleich weit entfernt ist.

Lhr. Wir wollen nun auch, wenn wir L. innerhalb des Kreises ziehen, diesen P. berücksichtigen.

Was für eine Verschiedenheit zeigt sich da sogleich, wenn ich eine L. innerhalb des Kr. ziehe?

Sollten die Kinder nicht von selbst darauf kommen, so zeichne der Lehrer innerhalb des Kr. 2 L. (s. Fig. 98), wovon die eine AB durch den M. P. geht, die andere, DE, ihn nicht berührt (auf diese L. hinzeigend). Könnt ihr es mir jetzt sagen?

Kdr. Ja! Die eine L. geht durch den M. P., die andere nicht.

Lhr. Ihr habt noch etwas vergessen (indem er Fig. 99 an die Tafel zeichnet). Sind hier die L. AB und DE eben so gezogen?

Kdr. Nein, diese L. berühren den Kr. gar nicht.

Lhr. Was hattet ihr also vorher zu sagen vergessen.

Kdr. Die eine L. ist von dem einen P. des Kr. durch den M. P. nach einem andern P. des Kr. gezogen.

Lhr. Eine gerade L., die von einem P. des Kr. durch den M. P. nach einem andern P. des Kr. geht, den Kr. also in seiner größten Ausdehnung durchmißt, nennen wir:

den Durchmesser des Kreises.

(s. Fig. 98 L. AB.)

Eine L., welche von einem P. des Kr. nach einem andern P. desselben gezogen ist, ohne durch den M. P. zu gehen, nennen wir:

eine Sehne;

so wie hier! (auf L. DE Fig. 98 zeigend.)

Würde ich die L. von einem P. des Kr. nur bis zum M. P. ziehen, würde das denn auch ein Durchmesser seyn? (indem er es wirklich thut, s. Fig. 100 L. AC.)

Kdr. Nein!

Lhr. (indem er diese L. bis zu einem P. auf der andern S. des Kr. verlängert, doch diese Verlängerung schwächer zeichnet, s. Fig. 100 L. CB).

Wie verhält sich wohl die L. AC, die nur von dem P. A des Kr. bis zum M. P. C reicht, zu der ganzen L. oder zum Durchmesser AB?

Kdr. Sie ist die Hälfte des D. M.

Lhr. Warum gerade die Hälfte?

Kdr. Der M. P. ist gleichweit von allen P. des Kr. entfernt; also ist die Entfernung des M. P. C von dem P. A

eben so groß, als die Entfernung des M. P. C von dem P. B, mithin ist L. A C und B C jede die Hälfte des Durchmessers A B.

Lhr. Darum nennt man auch die L., welche von dem M. P. aus nach irgend einem P. des Kreises gezogen sind:

Halbmesser.

Werden nun wohl alle H. M. eines und des nemlichen Kr. einander gleich seyn?

Kdr. Ja! Alle H. M. eines nemlichen Kr. sind einander gleich.

Lhr. Werden auch alle D. M. eines Kreises einander gleich seyn?

Kdr. Ja! Denn die D. M. sind doppelt so groß, als die H. M.; da nun alle H. M. gleich sind, so folgt daraus auch:

daß alle D. M. eines und des nemlichen Kreises einander gleich sind.

Lhr. Wenn man aus irgend einem P. des Kr. oder aus dem M. P. nach 2 P. des Kr. gerade L. zieht, wie hier (auf Fig. 101 und 102 zeigend), so schneiden sie ein Stück des Kr. ab; dieses Stück nennt man Bogen.

Jeder W. im Kr. steht also auf einem Bogen. Die Fläche, welche eine L. im Kr. mit dem Bogen, den sie abschneidet, einschließt, wie hier (auf Fig. 98 D E zeigend), nennen wir (weil sie vom Kr. abgeschnitten wird): Kreis-Abschnitt.

Die Fläche, welche von 2 geraden L., die aus dem M. P. nach 2 P. des Kr. hingezogen werden, und von dem Bogen, den sie abschneiden, gebildet wird, nennen wir (weil sie aus der Kreis-Fläche herausgeschnitten wird): Kreis-Ausschnitt (Fig. 101 A B C).

Lhr. Kann ein Kr. nur einen D. M. haben?

Kdr. Nein! Man kann von jedem P. des Kr. durch den M. P. eine L. nach einem gegenüberstehenden P. desselben Kreises ziehen; es giebt also eine Menge von D. M. im Kreise.

Lhr. Wie viele H. M.?

Kdr. Ein Kr. kann so viele H. M. haben, als man will, denn alle L., die vom M. P. nach irgend einem P. des Kr. gezogen werden, sind H. M.

Lhr. Wie viele Sehnen?

Kdr. Ebenfalls so viele man will.

Lhr. Wir haben L. innerhalb des Kr. gezogen; wir wollen nun auch L. außerhalb des Kr. nach irgend einem P. des Kr. ziehen, entweder so, daß die L., wenn ich sie verlängerte, den Kr. schneiden würde, oder, — wer sagt mir den 2ten Fall?

Kdr. Oder so, daß ihre Verlängerung den Kr. nur berühren und dann vorübergehen würde.

Lhr. Diese letztere L. nennen wir:

eine Berührungs-L.

Wir werden künftig auf diese L. zurückkommen.

XXXIV. Stufe. Eigenschaften und Verhältnisse der L., die in einem Kr. gezogen werden können.

137ste Aufg. Man soll angeben, ob ein Kr. 2 M.P. haben könne oder nicht?

Sollten die Kinder nicht von selbst auf den Beweis kommen, so verfahre der Lehrer, wie folgt:

Lhr. (indem er in einem Kr. [Fig. 103] 2 P., A und B, bezeichnet, wovon der eine, A, der wirkliche M.P. ist) A ist der wirkliche M.P. des Kr.; wir wollen annehmen, B sey ebenfalls ein M.P, und wollen durch beide P. L. CD ziehen; was für eine L. ist das wohl?

Kdr. CD ist ein D.M.

Lhr. Was wissen wir von den H.M.?

Kdr. Alle Halbmesser sind einander gleich.

Lhr. Da nun B ein M.P. seyn soll, so ist also L. BD = BC; und da A ein M.P. ist, so muß auch AD = AC seyn; aber auch BD = AD und AC. Wem war BD schon gleich?

Kdr. BD war = BC; nun wissen wir es zu beweisen. BD müßte also zugleich gleich seyn BC und AC; allein, da BC um AB größer ist als AC, so ist es unmöglich, folglich kann B nicht zugleich der M.P. seyn, wenn A schon der M.P. ist.

Lhr. Was folgt hieraus?

Kdr. Ein Kreis kann nur einen M.P. haben.

138ste Aufg. Es frägt sich: Ob ein D.M. den Kreis in 2 gleiche oder in 2 ungleiche Theile theilt?

(Die Kinder werden sich durch den Augenschein überzeugen, daß der Kr. durch den D. M. in 2 gl. Theile getheilt wird; allein ohne es beweisen zu können, der Lehrer verfahre daher wie folgt, auf den D. M. AB im Kr. Fig. 104 zeigend:)

Wir wollen hier (indem er den D. M. CD so zeichnet, daß derselbe den ersten D. M. AB rwkl. schneidet) einen zweiten D. M. ziehen, und sodann die End-P. beider durch gerade L. verbinden. Dadurch entstehen vier Dr.; wer kann mir beweisen, ob diese vier Dr. gl. oder ungl. sind?

Ein Kd. Die 4 Dr. sind gleich; denn jedes wird von 2 H. M. gebildet, die einen r. W. einschließen. Alle r. W. sind gl., alle H. M. sind einander gl., also sind in jedem ein W. und die beiden S., die ihn einschließen, gl., also sind die ganzen Dr. gl.

Lhr. Mithin liegen an der einen S. des D. M. AB 2 gl. Dr., und an der andern S. des D. M. AB ebenfalls 2 gl. Dr. Würde ich nun fortfahren noch mehrere Dr. zu bilden, indem ich z. B. die D. M. EF und GH so zöge, daß sie die Verbindungs-L. AD, DB, BC, CA rwkl. schnitten, und ihre End-P. abermals durch gerade L. verbände, so entstehen wieder gleiche Dr. Das könnte ich nun bis ins Unendliche fortsetzen; immer würden auf der einen S. des D. M. AB eben so viele gl. Dr. liegen, wie auf der andern S.; daraus folgt:

Der D. M. theilt den Kreis in 2 gl. Th.

(Daß eine Sehne den Kreis in 2 ungleiche Th. theilt, kann nunmehr leicht gezeigt werden.)

139ste Aufg. Stehen gl. W. in demselben Kr. auf gl. Bogen?

(Die Kinder werden diese Frage sogleich bejahen, ohne sie beweisen zu können; der Lehrer verfahre wie folgt, auf Fig. 105 zeigend:)

AB und CD sind 2 D. M., die sich schneiden; was wissen wir von den 4 W., die sie bilden?

Kdr. Es sind Sch. W., wovon immer die beiden gegenüberstehenden einander gleich sind.

Lhr. Also W. a = b, W. c = d. Jetzt wollen wir sehen, ob auch die Bogen, auf denen sie stehen, einander gleich sind?

Bogen DB ist sich selbst gl., was für einen Theil des

Kr. bekomme ich, wenn ich zu dem Bogen BD den Bogen CB des W. b hinzuthue?

Kdr. Wenn ꝛc., so bekomme ich einen Halbkreis.

Lhr. Wenn ich aber zu dem nemlichen Bogen BD den Bogen des W. a (der der Scheitel-W. des W. b ist), oder den Bogen AD hinzuthue, was bekomme ich sodann?

Kdr. Ebenfalls einen Halbkreis.

Lhr. Also sind die beiden Bogen CB und AD der Sch. W. a und b =, denn nur Gleiches zu Gleichem hinzugethan giebt Gleiches; es folgt also hieraus allgemein:

Gleiche W. des nemlichen Kreises haben gleiche Bogen.

140ste Aufg. In einem Kr. sind 2 D.M. gezogen, die sich unter r. W. schneiden; es frägt sich, ob sie den Kreis in 4 gleiche Bogen theilen? (s. Fig. 104 L. AB und CD.)

Kdr. 2 D.M., die sich rwkl. schneiden, theilen den Kr. in 4 gl. Bogen; denn alle r. W. sind einander gl., und gl. W. stehen auf gl. Bogen.

141ste Aufg. Sind die Sehnen gl. Bogen eines und desselben Kr. einander gleich?

(Der Lehrer zeichne Fig. 104, und verbinde die End-P. A, B, C, D der D.M. AB und CD durch gerade L., nachdem dies geschehen, frage er die Kinder: Ob diese 4 Verbindungs-L. wohl gleich sind? Die Kinder werden den Beweis so-gleich auf folgende Weise führen:)

In allen 4 Dr. sind in jedem 2 S. gl., als H.M. des nemlichen Kr; die W., die sie einschließen, sind gl., als r. W.; also sind auch die ganzen Dr. gl., folglich sind auch die 4 S. CB, BD, DA und AC gleich.

Die Bogen, auf denen die 4 W. stehen, waren ebenfalls gleich. Hieraus folgt also:

Die Sehnen gleicher Bogen sind einander gl.

142ste Aufg. Es frägt sich: Ob eine Sehne gleich dem D.M. des Kr. seyn könne?

Lhr. (indem er die Sehne AB Fig. 106 beschreibt) thut dasselbe auf euren Tafeln.

Zieht jetzt von den End-P. der Sehne nach dem M.P. des Kr. 2 L., CA und CB; diese L. sind H.M. Kann in

dem Dr. ABC, das sie mit der Sehne AB bilden, S. AB wohl so groß seyn, als beide H.M. zusammen?

Kdr. Nein; — denn die größte S. des Dr. ist dennoch immer kl., als die Summe der beiden andern S.

Lhr. Da nun 2 H.M. immer gleich dem D.M. sind, so folgt daraus:

Jede Sehne eines Kr. ist kl. als der D.M. des nemlichen Kr.

143ste Aufg. Steht eine L. aus der Mitte einer Sehne nach dem M.P. des Kr. gezogen, auf der Sehne rwkl.?

(AB Fig. 108 sey die Sehne, C der M.P. des Kr.; von C sind nach A und B 2 L. gezogen.)

Beweis. In den beiden Dr. ACD, CBD ist S. AC = S. BC als H.M., S. BD = AD als gleiche Th. der Sehne AB; CD sich selbst =; daher W. a=b; folglich sind beide W. als N.W. r. W.; folglich CD auf Sehne AB rwkl. Hieraus folgt:

Jede L. aus der Mitte einer Sehne nach dem M.P. des Kr. gezogen, steht auf der Sehne rwkl.

144ste Aufg. Es frägt sich: Ob eine L., die rwkl. auf der Mitte einer Sehne steht, durch den M.P. gehen muß?

Auflös. Man ziehe von dem End-P. der Sehne AB (Fig. 108) nach dem M.P. des Kr. C 2 L., AC und CB, diese bilden mit der rwkl. L. CD 2 Dr., CAD und CBD, in denen W. a=b, S. DA = DB; S. CD sich selbst =; folglich in jedem Dr. ein W. und die beiden S., die ihn einschließen, gleich, folglich auch die ganzen Dr.; mithin CA = CB; folglich beide H.M. des Kr. Hieraus folgt:

Eine L., die rwkl. auf der Mitte einer Sehne steht, geht durch den M.P. des Kr.

145ste Aufg. Es frägt sich: Ob 2 gleich große Sehnen desselben Kr. gleich weit vom M.P. entfernt sind?

(Um die Kinder auf den Beweis hinzuleiten, verfahre der Lehrer wie folgt:)

Lhr. Was bezeichnet die Entfernung einer Sehne von dem M.P.?

Kdr. Die Entfernung ꝛc. wird durch den senkrechten Abstand ihres M.P. von dem M.P. des Kr. bezeichnet.

Lhr. Was für L. muß ich also von den Sehnen nach dem M.P. des Kr. ziehen?

Kdr. Rwkl. L.

Lhr. (indem er, von der Mitte beider Sehnen AB und ED nach dem M.P. des Kr. 2 Linien zieht, FG und GC, s. Fig. 107.) Es frägt sich also: Ob diese beiden Linien gleich sind?

(Die Kinder werden nun von selbst darauf kommen, die End-P. der beiden S. mit dem M.P. des Kr. durch L. zu verbinden, und daher die L. AC, BC, DC, EC ziehen, und dann den Beweis führen wie folgt:)

Die beiden Dr. EDC und ABC sind einander gleich, weil alle 3 S. gleich sind. (AB und ED als gleiche Sehnen, die übrigen S. als H.M.) Gleiche Dr. haben gleiche Höhe.

EC und GC bezeichnet in beiden die Höhe; also ist FC = GC, und da beide L. zugleich die Entfernung der Sehnen vom M.P. bezeichnen, so sind auch diese Entfernungen gleich; hieraus folgt:

Zwei gleich große Sehnen eines Kr. sind gleich weit von dem M.P. des nemlichen Kr. entfernt.

Und umgekehrt:

Zwei Sehnen, die gleich weit vom M.P. entfernt sind, sind gleich groß.

Ferner:

Zwei Sehnen von ungleicher Größe haben ungleiche Entfernungen vom M.P.

Endlich:

Zwei Sehnen, die ungleich weit vom M.P. entfernt sind, sind von ungleicher Größe.

146ste Aufg. In einem Kr. sind 2 D.M. beschrieben, es frägt sich: Ob die Sehnen, womit man ihre End-P. verbindet, gll. sind? (s. Fig. 118.)

Den Beweis dafür, daß sie gll. sind, werden die Kinder sogleich finden, denn a=b, als Sch.W.; die S., welche diesen W. einschließen, =, als H.M.; folglich die Dr. ABE und CDE ebenfalls gleich; mithin W. c=d, m=n; da nun diese W. als W.W. =, so sind die Sehnen AB und CD gll.

Es folgt hieraus: 2 Sehnen eines Kr., deren End-

P. durch D.M. verbunden werden können, sind gleich groß.

XXXV. Stufe. Eigenschaften und Verhältnisse der W., die durch 2 K. gebildet werden, welche innerhalb des Kr. beschrieben werden können.

147ste Aufg. Welchen W. bilden 2 Sehnen, die auf einem H.Kr. stehen (einen Halbkreis zum Bogen haben)?

Im Kr. Fig. 109 ist D.M. AB beschrieben; aus irgend einem P. des Kr., z. B. aus D, nach den End-P. des D.M. sind 2 Sehnen gezogen, DA und DB; wie groß wird der W. seyn, den die beiden Sehnen bilden?

(Den Beweis werden die Kinder schwerlich finden; der Lehrer verfahre daher wie folgt:)

Lhr. (indem er eine H.L. DC zieht.) Hier sind 2 Dr. ADC, DBC; sind beide glsch.?

Kdr. Ja, denn CD, CA, CB sind H.M.

Lhr. Was folgt daraus in Ansehung der W.? (indem er die W. mit Buchstaben bezeichnet.)

Kdr. W. a = b, W. c = d.

Lhr. Wie viele r. W. betragen alle 4 W. a, b, c, d zusammen? — Kdr. Alle 4 W. zusammen betragen 2 r. W.

Lhr. Was für ein Maaß muß der W. bei D haben?

Kdr. Das eines r. W.; denn c + b = d + a, also c + b = $\frac{1}{2}$ von 2 r. W. = 1 r. W.

Lhr. Hieraus folgt nun allgemein:

Der W., den 2 Sehnen, die in einem P. des Kr. zusammen treffen, bilden, so daß die End-P. der Sehnen auf den End-P. des D.M. des Kr. stehen, ist ein r. W., oder: der W., der auf einem Halb-Kr. steht, ist ein r. W.

(Es läßt sich nun leicht zeigen, daß ein W. von 2 Sehnen gebildet, dessen Sch.P. im Kr. liegt, wenn er auf einem Bogen, der gr. als ein H.Kr. ist, steht, ein st. ist, und wenn der W. auf einem Bogen steht, der kleiner als ein Halb-Kr. ist, ein sp. W.)

148ste Aufg. Welches Verhältniß findet zwischen 2 auf dem nemlichen Bogen stehenden W. Statt, wenn der Sch. P. des einen W. zugleich der M. P. des Kr. ist; der Sch. P. des andern W. im Kr. liegt?

Lhr. Sucht hier zuerst auf, wie viele verschiedene Fälle es in Hinsicht der Bildung beider W. geben kann?

(Die Kinder werden 3 Fälle finden), nemlich:

1) Daß der W., dessen Sch. P. im Kr. liegt, durch einen D. M. und eine Sehne gebildet wird. (Fig. 110 AB und AC.)
2) Daß der W. durch 2 Sehnen gebildet wird, die jedoch die Sch. des W. am M. P. nicht schneiden. (Fig. 111.)
3) Daß der W. durch 2 Sehnen gebildet wird, welche die Sch. des W. am M. P. schneiden. (Fig. 112.)

Die Kinder werden bei den beiden ersten Fällen ohne Hülfe des Lehrers das Verhältniß beider W. finden und beweisen, wie folgt:

Kdr. (auf Fig. 110 zeigend.) W. b und c stehen auf dem gl. Bogen BC. Dr. ACD ist ein glsch. Dr., DA und DC sind die gl. Sch., folglich ist W. a = b. Nun ist W. c, als A. W. des Dr. ACD, = W. a + b, also doppelt so groß, als jeder von beiden W.; mithin ist in diesem Falle der W. am M. P. doppelt so groß, als der W. am Kr., der mit ihm auf gl. Bogen steht.

Im 2ten Falle (Fig. 111): Die beiden Dr. ABC und ACD sind glsch., also W. c = d, W. a = b, also c + a = d + b; da nun das Maaß des W. c = der Summe aller 4 W. ist (als A. W. eines Tr. ABCD mit 3 innern W.), so ist er doppelt so groß als c + a; folglich gilt in diesem Falle dasselbe, wie in dem vorhergehenden.

Bei dem 3ten Falle ist der Beweis schwieriger, und wird der Lehrer zu Hülfe kommen müssen, wie folgt (auf Fig. 112 zeigend): W. c ist der W. am Kr., W. a der W. am M. P., aus D ist durch den M. P. C eine H. L. DF gezogen. Welchen W. des Dr. DBC ist W. a + d =?

Kdr. a + d = b + c + m.

Lhr. Wie verhält sich W. d zu m?

Kdr. W. d ist doppelt so groß als W. m, weil er mit ihm auf gl. Bogen steht. (s. den Beweis zum 1sten Falle.)

Lhr. Um wie viel ist W. b gr. als W. c?
Kdr. W. b ist um den W. m gr. als W. c.
Lhr. Welchem W. ist also W. b — W. m =?
Kdr. b — m = c.
Lhr. a + d war = c + b + m; d = 2 m; ziehe ich nun d von c + b + m ab, so bleibt übrig c + b — m; also ist a allein = c + b — m, oder, da b — m = c ist, a = 2 c, folglich ist auch in diesem Falle der W. am M. P. doppelt so groß als der W. am Kr., der mit ihm auf gl. Bogen steht.

Eine andere Auflösung. Wir wollen uns blos die L. CD ziehen, Fig. 60, Taf. XIV. Wie groß ist der W. d?

Kdr. So groß als a und e zusammen genommen.

Ein anderes Kd. Auch so groß als b + c, denn W. d ist Außenwinkel an beiden Dreiecken.

Lhr. Gut. Was folgt daraus?
Kdr. Daß a + e = b + c.
Lhr. Richtig! Wir wollen nun noch den W. m nehmen. Ist der so groß als e?
Kdr. Ja, denn CD = AC, weil beides H. M. sind.
Lhr. Wir wollen also statt W. e den W. m nehmen. Wie heißt der Satz nun? — Kdr. a + m = b + c.
Lhr. Wie groß ist aber W. m + c? — Ist ein W. da, der eben so groß ist?
Kdr. Ja, der W. b; denn CB = CD, also ist BCD ein glsch. Dr.
Lhr. Gut. Statt b können wir also m + c setzen. Sprecht es nun einmal aus. — Kdr. a + m = m + c + c.
Lhr. a + m ist also halb so groß als m + 2 mal den W. c oder 2 c. Wir wollen nun den W. m ganz weglassen; bleibt alles dann gleich?
Kdr. Ja, denn es ist Gl. von Gl. hinweggenommen.
Lhr. Sprecht nun den Satz aus.
Kdr. W. a = 2 c.

149ste Aufg. Sind alle W. am Kr., die auf gl. Bogen stehen, von gleicher Größe?

Der Beweis ist folgender (s. Fig. 113, Taf. IX): W. a als W. am Kr. = der Hälfte des W. c, als W. am M. P. W. b = der Hälfte des nemlichen W. c; also W. a = b.

150ste Aufg. Sind alle W. am M. P., die auf gl. Bogen stehen, einander gl.?

Kdr. (indem sie Fig. 114 zeichnen, wo AB und DE die gl. Bogen, a und b die gl. W. sind; L. AB und DE die Sehnen der Bogen.)

Gl. Bogen haben gl. Sehnen (s. die 130ste Aufg.). Also sind in den beiden Dr. ABC und DEC die S. AB und DE =, die übrigen S. sind als H. M. ebenfalls gl.; mithin sind die ganzen Dr. gl.; folglich auch die ähnlich liegenden W., also W. a = W. b; daraus folgt:

Die W. am M. P., die auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich;

und umgekehrt:

Die W. am M. P., die auf ungleichen Bogen stehen, sind ungleich.

151ste Aufg. In dem Kreise Fig. 61, Taf. XIV ziehe ich vier Sehnen, AB, BC, CD, DA, so daß ein Viereck entsteht. Es frägt sich: wie viel zwei gegenüberstehende W. zusammen betragen?

Auflös. Man ziehe die Eckl. AC und BD; dann entstehen jederzeit zwei gl. W., nemlich die W. a und a; beide stehen auf gleichem Bogen; die W. b und b, c und c, d und d eben so; folglich bestehen die vier W. des Vierecks aus: 2 a + 2 b + 2 c + 2 d; alle W. sind aber gleich 4 r. W., a + b + c + d muß also halb so viel seyn als das Doppelte; demnach sind zwei gegenüberstehende W. = 2 r. W.

XXXVII. Stufe. Verhältniß der L., die außerhalb des Kr. gezogen werden können, zu dem Kr. und zu den L. innerhalb des Kr.

152ste Aufg. Ich ziehe einen H. M. CD (Fig. 115, Taf. IX), und durch den P. D, welcher im Umkreise liegt, ziehe ich eine L. AB, welche auf CD senkrecht steht; es frägt sich, ob diese L., welche eine Berührungsl. des Kr. ist, den Kr. nur in dem P. D berührt?

Auflös. Wir ziehen uns die L. CF nach dem P. F, welchen wir willkührlich auf AB annehmen. Was ist DC?

Kdr. Ein H.M.

Lhr. Und das Dr. CDF?

Kdr. CDF ist ein rechtw. Dr.; denn DF steht auf CD rechtw.

Lhr. Ist L. CF größer als CD?

Kdr. Ja, denn CF steht dem größten W. gegenüber.

Lhr. Folglich ist CF auch größer als ein H.M., und es muß ein Theil dieser L., folglich auch ihr Endpunkt F, außerhalb des Umkreises liegen. Vielleicht aber wäre es anders, wenn wir den P. F näher nach D hinlegten, etwa nach E?

Kdr. Nein; denn CDE ist wieder ein rechtw. Dr., daher CE größer als CD, oder größer als ein H.M.; folglich liegt der P. E außer dem Umkreise.

Lhr. Wenn wir nun den P. E recht dicht neben D nehmen?

Kdr. Die L. CE wird doch immer größer seyn als CD, denn sie steht dem r. W. gegenüber, der P. E mag so nahe an D liegen als er will.

(Der Lehrer nehme dann noch den P. E auf der anderen S. von D, auf der L. DA, wo sich dasselbe finden wird.)

Lhr. Was folgt nun hieraus?

Kdr. Daß jede Berührungsl. den Kr. in nicht mehr als einem P. berührt.

Lhr. Richtig, obwohl es anders aussieht. Denn wenn wir an einem gezeichneten Kreis eine Berührungsl. ziehen, so schleift sich die L. ein ganzes Ende mit dem Kr. fort, besonders wenn der Kr. einen großen Durchmesser hat. Das kommt aber daher, daß weder die Kreisl. noch die gerade L. wirkliche Linien sind, sondern Striche, welche Breite haben, die die wirkliche L. nicht hat.

153ste Aufg. Es frägt sich: Ob der H.M., welcher vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte gezogen wird, jederzeit senkrecht auf der Berührungsl. steht? — oder ob die Berührungslinie auch anders als senkrecht auf dem H.M. stehen könne, welcher nach dem Berührungspunkte gezogen worden?

Auflös. Es sey Fig. 115 AB die Berührungslinie. Wir ziehen nach dem Berührungspunkte D die L. CD. Gesetzt nun,

CD stände nicht senkrecht auf AB. Vom Punkte C aus muß sich nothwendig eine L. senkrecht auf AB ziehen lassen, die aber, wenn CD nicht senkrecht auf AB steht, mit CD nicht zusammen fallen kann. Wir wollen einmal annehmen, CE wäre die L., welche auf AB senkrecht steht. Liegt der Punkt E im Umkreise?

Kdr. Nein; denn D ist der Berührungspunkt, und in mehr Punkten, als diesem einen, berührt die L. AB den Kreis nicht, also liegt E nicht im Umkreise, sondern außer demselben.

Lhr. Welche L. ist größer, CE oder CD?

Kdr. CE, denn weil E außerhalb des Umkreises liegt, so ist CE so groß als ein H.M. und noch Etwas dazu; CD aber ist ein H.M.

Lhr. Wenn aber CED ein rechter W. wäre, was wäre dann CED für ein Dreieck? — Kdr. Ein rwkl. Dr.

Lhr. Dem größten W. steht aber die größte Seite gegenüber. Welches wäre der größte W.?

Kdr. Der rechte W. CED; dem müßte gegenüber auch die größte S. stehen, dann wäre CD die größte Seite.

Lhr. Kann das wohl seyn?

Kdr. Nein; denn es wäre dann der H.M. größer als der H.M. und noch Etwas dazu genommen.

Lhr. Richtig! Daher kann CED kein r. W. seyn, und wird es auch nicht, wir mögen die L. CE näher oder entfernter, oder auf dieser oder der andern Seite der L. CD ziehen. Weil sich aber von C doch eine L. senkrecht auf AB ziehen lassen muß, so kann nur CD selbst diese L. seyn. — Was folgt daraus?

Kdr. Der H.M. von dem M.P. nach dem Berührungspunkte gezogen, steht jederzeit senkrecht auf der Berührungslinie.

Lhr. Und umgekehrt? — (Es gilt das auch für die Durchmesser.)

Kdr. Die Berührungslinie steht immer senkrecht auf dem H.M. oder D.M., der nach dem Berührungspunkte gezogen worden.

154ste Aufg. Es frägt sich: Ob die Sch. des W., den 2 Ber.L. desselben Kr. bilden, von gleicher oder ungleicher Größe sind?

Diese Aufgabe kann auf folgende Art gelöst werden (s. Fig. 116): AE und BE seyen die beiden Ber.L. Aus den Ber.P. D und F zieht man nach dem M.P. des Kr. C die H.M. DC und FC; sodann verbindet man beide Ber.P. durch L. DF.

Lhr. Was für L. sind DC und FC?

Kdr. DC und FC sind H.M.

Lhr. Also ist Dr. DFC ein glsch. Dr. — Wie verhalten sich die W. a und b dieses Dr.? — Kdr. W. a=b.

Lhr. Was für W. bilden H.M. DC mit Ber.L. AE, und H.M. CF mit Ber.L. BE?

Kdr. Die Ber.L. bilden mit dem H.M. r. W.

Lhr. Wer kann jetzt die Frage beantworten?

Ein Kd. Die Sch. des W., den die beiden Ber.L. bilden, sind von gl. Größe; denn die W., welche die H.M. mit den Ber.L. bilden, sind als r. W. gl., W. a und b sind auch =; Gl. von Gl. abgezogen, giebt Gl., also auch W. c=d; Dr. DFE folglich ein glsch. Dr., ED und EF die gl. Sch.

Es kann jetzt leicht durch die Gleichheit der Dr. bewiesen werden, daß eine L., die man aus dem Sch.P. des W. der Ber.L. nach dem M.P. des Kr. zieht, den W. in 2 gleiche Th. theilt;

und umgekehrt:

daß eine L., die den W., den beide Ber.L. bilden, in 2 gleiche Th. theilt, durch den M.P. des Kr. geht.

155ste Aufg. Theilt eine L., die aus dem Ber.P. nach dem M.P. des Kr. gezogen ist, und eine mit der Ber.L. gll. Sehne schneidet, diese Sehne in gleiche oder ungleiche Theile? (s. Fig. 117.)

L. AB sey die Ber.L., CD die mit ihr gll. Sehne, F der Ber.P., C der M.P. des Kr.; so ziehe der Lehrer die beiden H.M. CE und CD, und führe nunmehr die Kinder auf folgende Art zu dem Beweise.

Lhr. Was für W. sind a und b?

Kdr. a und b sind r. W.

Lhr. Wir wollen jetzt die beiden Dr. DGC und EGC näher untersuchen. Was für W. sind p und q?

Kdr. p und q sind r. W. (als äußere G. W. der W. a und b bei gll. L.)

Lhr. Was wissen wir von W. m und n?

Kdr. Sie sind gl., weil Dr. DEC ein glsch. ist.

Lhr. Also ist auch W. c = d.

Kdr. Was wissen wir von den S. CD und CE?

Kdr. S. CD und CE sind als H. M. gleich.

Lhr. Was folgt in Hinsicht der ganzen Dr.?

Kdr. In beiden Dr. sind alle W. und eine S. gleich, also sind die ganzen Dr. gleich.

Lhr. Könnt ihr nun sagen: ob DE getheilt ist?

Kdr. Ja! DE ist durch die aus dem Ber. P. rwkl. gezogene L. gleich getheilt.

Lhr. Also kann ich allgemein annehmen:

Eine L., die rwkl. aus dem Ber. P. einer Ber. L. gezogen ist, theilt alle mit ihr gll. Sehnen in zwei gleiche Th.

156ste Aufg. Wenn eine Berührungslinie mit einer Sehne einen W. macht, wie verhält sich dieser W. zu dem W. am Umkreise, welcher auf der Sehne steht?

Auflös. Es sey (Fig. 62, Taf. XIV) BC die Ber. L., AD die Sehne, AED der W., der auf der Sehne steht. Man ziehe senkrecht auf A die L. AF, und sodann die L. FD, so ist FDA ein r. W., weil er auf einem D. M. steht, folglich der W. FAD + W. AFD auch ein r. W. — Eben so ist aber auch W. FAD + W. DAC = einem r. W., folglich DAC = AFD. — Nun ist aber W. AFD = W. AED, weil sie auf gleichem Bogen stehen; folglich auch W. DAC = W. AED.

Zögen wir noch die L. AG und GD, so ist W. AGD + W. AED = 2 r. W., weil sie im Vierecke einander gegenüber liegen. W. DAC + W. DAB sind auch = 2 r. W. als Nebenwinkel. Weil nun W. AED = W. DAC, so ist W. AGD = W. DAB.

XXXVII. Stufe. Bildung und Theilung von L. durch Hülfe des Kr.

157ste Aufg. Es frägt sich: Wie viele Kr. erfordert werden, um aus einem gegebenen P. Linien von bestimmter Länge zu beschreiben?

(Die Kinder werden sogleich einsehen, daß es dazu nur eines einzigen Kr. bedarf, indem man aus dem gegebenen P. mit einer Oeffnung des Zirkels, die gleich der gegebenen L. ist, einen Kr. beschreibt; alle, von dem P. als M. P. des Kr. an den Kr. gezogene L. sind sodann von der verlangten Länge. Wie man eine L. zu einer doppelten Länge ausdehnen kann, ergiebt sich hieraus von selbst.)

158ste Aufg. Es ist eine L. gegeben, man soll sie zu dem Dreifachen ihrer Länge ausdehnen, wird dies mit Hülfe eines einzigen Kr. geschehen können?

(Die Kinder werden hier sogleich finden, daß dazu zwei gleiche Kr. nöthig sind, indem man den Zirkel in einem End-P. der gegebenen L. einsetzt, mit einer Oeffnung desselben, gleich der gegebenen L., einen Kr. beschreibt, die L., die nur H. M. war, zum D. M. verlängert, sodann aus dem End-P. des D. M. einen zweiten Kr. mit gleicher Oeffnung des Zirkels beschreibt, und die nemliche L. um einen H. M. dieses Kr. verlängert. — Auf ähnliche Art kann jede L. durch Hülfe mehrerer Kr. zur 4fachen, 5fachen Länge u. s. w. vergrößert werden.)

159ste Aufg. Man soll eine gegebene L. in 2 gleiche Th. theilen.

Lhr. AB (s. Fig. 119) sey die L., die in gleiche Theile getheilt werden soll.

Ich setze jetzt den Zirkel in den einen End-P., z. B. in A, ein, mit irgend einer beliebigen Oeffnung desselben, z. B. mit einer Oeffnung = AD, beschreibe einen Kr. (der hier, um den Raum zu sparen, nur durch einen Bogen MN angedeutet ist.) Ich setze darauf den Zirkel in den andern End-P. B ein, und beschreibe damit abermals einen Kr. OP, der den ersten Kr. schneidet.

Ich verfahre auf der andern S. eben so, und verbinde

darauf den Dschn. P. der beiden ersten Kr. D mit dem Dschn. P. der beiden andern Kr. E durch eine gerade L. DE, so theilt diese die gegebene L., da wo sie dieselbe schneidet, in 2 gleiche Theile.

Wer will den Beweis führen?

Die Kinder werden ihn auf folgende Art führen:

Wir verbinden die Dschn. P. E und D mit den End-P. der zu theilenden L. A und B, durch die L. AE, AD, BE, BD, diese L. sind, als H. M. gl. Kr., gl., also ist ABED ein gls. Pgr., die beiden L. AB und DE sind Eck-L. desselben, die sich immer unter r. W. schneiden; also ist in den beiden Dr. ACE und CBE W. a=b, m=n, also auch c=d, und da S. DA = S. DB, so sind die ganzen Dr. gl., folglich auch S. CA = S. CB, mithin L. AB bei C gl. getheilt.

160ste Aufg. Man soll auf einer gegebenen L. aus einem in ihr gegebenen P. eine rwkl. L. errichten.

(AB Fig. 120 sey die L. — C der P. in derselben, aus dem die rwkl. L. beschrieben werden soll.)

Lhr. Nehmt irgend einen zweiten P. in der L. AB, z. B. D, und messet mit dem Zirkel seine Entfernung von dem gegebenen P. C; sodann bezeichnet auf der andern S. des P. C mit der gleichen Oeffnung des Zirkels einen zweiten P. E, in der L. AB so, daß also CD = CE wird.

Werdet ihr jetzt die Aufgabe zu lösen wissen?

Kdr. Ja! wir dürfen nur so verfahren, wie bei der vorhergehenden Aufgabe; d. h. aus D und E 2 gl. Kr. beschreiben, und aus C, dem M. P. der L. DE, eine L. CF nach dem P. ziehen, wo beide Kr. sich schneiden, so muß L. CF auf AB rwkl. stehen.

161ste Aufg. Man soll auf eine gegebene L. aus einem außerhalb derselben gegebenen P. eine rwkl. L. (Perpendikel) beschreiben.

AB sey die L., C der P. (s. Fig. 121).

Auflös. Ich nehme irgend einen P. auf der dem gegebenen P. gegenüberliegenden S. der L. AB, z. B. D, setze den Zirkel in den gegebenen P. C ein, öffne ihn bis D, beschreibe mit dieser Oeffnung des Zirkels einen Kr., so wird ein Stück der L. AB abgeschnitten, nemlich EF; dieses halbire ich

(nach der Auflöſ. der 159ſten Aufg.), und ziehe aus der Mitte G nach C eine L., welche ſodann die verlangte rwkl. L. iſt.

Beweis. Da in den beiden Dr. CEG und CFG S. CE = S. CF; EG = FG; CG ſich ſelbſt =, ſo ſind die ganzen Dr. gl., alſo auch W. a = b, alſo beide r. W., mithin ſteht die L. CG, die aus dem gegebenen P. C auf die gegebene L. AB gezogen iſt, auf derſelben rechtwinklich.

162ſte Aufg. Man ſoll von einem P. außerhalb des Kr. auf einen Kr. eine Ber. L. ziehen.

Auflöſ. Ich verbinde den gegebenen P. A mit dem M. P. des Kr. B (ſ. Fig. 122) durch die L. AB. Dieſe L. AB theile ich in 2 gleiche Theile, beſchreibe aus C dem M. P. der Linie einen 2ten Kr., der den nemlichen P. C zum M. P. hat, ziehe aus dem gegebenen P. A auf den Dſchn. P. der beiden Kr. auf D eine L., ſo iſt dies die verlangte Ber. L.

(Von dem Dſchn. P. D ſey auf B, den M. P. des erſten Kr., noch eine H. L. DB angedeutet.)

Beweis. AB iſt der D. M. des Kr., deſſen M. P. C iſt, der W. bei D iſt ein r. W., da er auf einen H. Kr. ſteht. Da BD zugleich ein H. M des erſten Kr. iſt, ſo ſteht alſo die Ber. L. AD auf dem H. M. BD rwkl.; folglich iſt die Aufgabe richtig gelöſet.

XXXVIII. Stufe. Beſchreibung von Kr. in Beziehung auf gegebene P., und Auffindung von P. in Beziehung auf einen gegebenen Kreis.

163ſte Aufg. Es iſt ein Kr. gegeben; man ſoll deſſen M. P. finden.

Lhr. Beſchreibt in dem Kr. eine Sehne (ſ. Sehne AB Fig. 124). Halbirt die Sehne (ſ. die 159ſte Aufg.). Beſchreibt auf der Mitte der Sehne eine rwkl. L. CD (ſ. die 160ſte Aufg.), und verlängert dieſe ſo, daß ſie den Kreis in 2 P. berührt. Wird die L. CD ein Durchmeſſer oder eine Sehne ſeyn?

Kdr. CD muß ein D. M. ſeyn, weil eine L., die auf der Mitte einer Sehne rwkl. ſteht, durch den M. P. gehen muß, und weil eine L., die von einem P. des Kr. zu einem

andern P. des Kr. durch den M.P. gezogen ist, ein Durchmesser ist.

Lhr. Da wir nun wissen, daß der M.P. des Kr. in dieser L. liegt, wie werden wir es weiter anzufangen haben, um denselben aufzufinden?

Kdr. Wir theilen den D.M. CD in 2 gl. Th., so ist der Th.P. des D.M. der M.P. des Kr.

Lhr. Richtig!

164ste Aufg. Es sind 2 P. gegeben, man soll einen Kr. beschreiben, der sie beide trifft.

Die Kinder werden die folgende Auflös. finden:

Man beschreibt mit einer beliebigen Oeffnung des Zirkels aus jedem der beiden gegebenen P. einen Kr.; aus dem Dschn. P. beider Kr., mit gleicher Oeffnung des Zirkels, einen 3ten Kr., so trifft derselbe beide gegebene P., weil beide P. End-P. seiner H.M. sind.

Auf ähnliche Art könnte man durch 2 gegebene P. einen Kr. beschreiben, so daß diese P. die End-P. des D.M. des Kr. würden.

165ste Aufg. Es sind 3 P. gegeben, die nicht in gerader L. liegen, man soll einen Kr. beschreiben, so daß alle 3 P. in dem Kr. liegen.

A, B, C, Fig. 123, seyen die 3 P. Man verbinde sie durch L. AB, BC, CA; errichte auf der Mitte einer jeden derselben eine rwkl. L.; sie werden alle in einem P. zusammentreffen; aus diesem P. F beschreibe man mit einer Oeffnung des Zirkels = der Entfernung dieses P. von irgend einem der gegebenen P. einen Kr., so werden alle gegebenen P. in diesem Kr. liegen.

Zur Führung des Beweises ziehe man noch aus F, dem Dschn.P. der rwkl. L., nach den 3 gegebenen P. die L. FA, FB, FC.

Beweis. In den beiden Dr. AEF und EBF ist S. AF = S. BF, S. EF sich selbst gleich; W. a = b (als r. W.). Was folgt daraus in Absicht der beiden Dr.?

Kdr. Beide Dr. sind gleich, weil in beiden 1 W. und die 2 ihn einschließenden S. gleich sind.

Lhr. Also ist auch S. FA = FB; aus eben dem Grunde

S. FC = S. FB; mithin FA, FB, FC gl.; folglich, da F der M. P. eines Kr., der mit einer dieser L. beschrieben ist, alle 3 L. H. M., deren End-P. A, B, C im Kr. liegen.

XXXIX. Stufe. Bildung und Theilung der W. durch Hülfe des Kr.

166ste Aufg. Man soll durch Hülfe eines Kr. einen r. W. bilden.

(Die Kinder werden sich erinnern, daß alle W., deren Sch. P. im Kr. liegen, und welche auf einem H. Kr. stehen, r. W. sind; daß sie also nur aus den beiden End-P. des D. M. nach irgend einem P. des Kr. 2 Sehnen ziehen dürfen, um einen r. W. zu bekommen.)

167ste Aufg. Man soll einen r. W. mit 2 gleichen Sch. beschreiben.

Lhr. Bildet zuerst einen r. W. durch Hülfe eines Kr.; wie werden wir es anfangen müssen, um beide Sch. dieses W. gleich zu machen?

(CA und CB seyen die Sch. des r. W. Fig. 125.)

Kdr. Wir müssen den Zirkel in den Sch. P. des r. W. in C einsetzen, und mit einer Oeffnung = dem gr. Sch. CA einen Kr. beschreiben, sodann den kl. Sch. CB bis an diesen Kr. verlängern, so wird er dem gr. Sch. gl. seyn, da der längere Sch. CA und der verlängerte Sch. CD beide H. M. des nemlichen Kr. sind.

Ein anderes Kd. Ich könnte auch mit einer Oeffnung des Zirkels = dem kl. Sch. CB ein Stück von dem gr. Sch. CA abschneiden, so würden der kl. Sch. CB und der verkürzte Sch. CE H. M. des nemlichen Kr. und also = seyn.

Ein drittes Kind. Ich könnte auch von dem Mittelpunkte des Kreises eine Linie rechtw. mit AB aufrichten, bis sie den Umkreis schneidet, uud dann den dadurch im Umkreise gefundenen Punkt durch gerade Linien mit den Punkten A und B verbinden, wodurch ebenfalls ein rechtw. glsch. Dr. entstehen würde. (Vergleiche die 161ste Aufgabe.)

168ste Aufg. Man soll 2 gleiche sp. W. beschreiben, die einen gemeinschaftlichen Sch. haben.

Auflös. Fig. 126 sey der sp. W., AB und AC dessen Sch. Ich setze den Zirkel in den Sch. P. A ein, beschreibe mit einer beliebigen Oeffnung des Zirkels einen Kr., so sind AD und AE H. M. dieses Kr.; ich verbinde die End-P. beider durch eine Sehne DE, beschreibe aus einem der End-P. der Sehne, z. B. aus D, mit einer Oeffnung des Zirkels = dieser Sehne, einen 2ten Kr., ziehe nach F, dem P., wo sich beide Kr. schneiden, eine L., die also Sehne des ersten Kr. und zugleich H. M. des 2ten Kr. ist; von diesem P. F ziehe ich nach dem M. P. des ersten Kr. A L. FA, so entsteht ein 2tes Dr. ADF, das mit dem ersten Dr. ADE 3 gl. S. hat, also auch gl. W.; folglich ist der sp. W. b = dem sp. W. a, und beide haben einen gemeinsch. Sch.

169ste Aufg. Man soll 3 gleiche stumpfe W. um einen P. beschreiben.

Auflös. Ich beschreibe einen Kr., dessen M. P. A sey, aus irgend einem P. desselben, z. B. aus B, Fig. 127, beschreibe ich mit dem H. M. desselben einen 2ten Kr.; sodann lege ich das Lineal an die M. P. der beiden Kr. B und A, ziehe aus A in der Richtung von AB nach einem gegenüberstehenden P. des 1sten Kr. eine L. AC. Ferner ziehe ich aus A (dem M. P. des ersten Kr.) nach beiden Dschn. P. der beiden Kr., nach D und E, die L. AD und AE, so sind die 3 W. am M. P. A, nemlich m, n, a, die verlängten W.

(Sollte niemand den Beweis zu führen sich getrauen, so ziehe der Lehrer von B, dem M. P. des 2ten Kr., nach einem der Dschn. P., z. B. nach D, eine L., und von B nach A eine 2te L. BA und frage dann:)

Lhr. Was für ein Dr. ist wohl Dr. ABD?

Kdr. Ein gleichseitiges, weil dessen S. H. M. gleicher Kr. sind.

Lhr. Wie groß ist also W. a?

Kdr. W. a = $\frac{2}{3}$ eines r. W.

Lhr. Wie viel betragen a und m zusammen?

Kdr. W. a + W. m = 2 r. W.

Kdr. W. m allein = 2 r. — $\frac{2}{3}$ r. W. = $\frac{4}{3}$ eines rechten W.

Lhr. Wie viel beträgt W. n?

Kd r. W. n auch = $\frac{4}{3}$ r. W.
(aus demselben Grunde wie W. m.)

Lhr. m + n betragen also zusammen $\frac{8}{3}$ r. W., W. a + b auch = $\frac{4}{3}$ r. W., folglich sind alle 3 st. W. um den P. A gl.

Auf ähnliche Weise können 4 r. W., Wechsel-W., Gegen-W. u. s. w. beschrieben werden.

170ste Aufg. Man soll einen gegebenen W. in 2 gleiche Th. theilen.

Auflös. Der W. bei A Fig. 128 sey der gegebene W., der in 2 gleiche Th. getheilt werden soll. Ich beschreibe aus dem Sch. P. des W., aus A, einen Kr. mit einer beliebigen Oeffnung des Zirkels, aus den beiden P., wo dieser Kr. die beiden Sch. des W. schneidet, aus D und E; beschreibe ich mit der nemlichen oder einer andern Oeffnung des Zirkels 2 Kr., und aus ihrem Durchschnitts-P. F ziehe ich nach dem Sch. P. des gegebenen W. A eine L. AF, so ist der W. bei A gleich getheilt.

Beweis. S. AD = AE; EF = FD, AF sich selbst gleich, also Dr. AFD = Dr. AFE, also auch W. m = n.

XI. Stufe. Beschreibung geradliniger Figuren durch Hülfe der Kr.

171ste Aufg. Man soll auf einer gegebenen L. ein gleichseitiges Dr. beschreiben.

Auflös. Man setzt den Zirkel in den einen End-P. der gegebenen L. ein, beschreibt mit einer Oeffnung desselben = dieser L. einen Kr., setzt den Zirkel darauf mit der nemlichen Oeffnung in den andern End-P. der L. ein, und beschreibt einen 2ten Kr.; sodann verbindet man die beiden End-P. der gegebenen L. mit dem Dschn. P. der beiden Kr., so ist das dadurch gebildete Dr. das verlangte gls. Dr. (Der Beweis ist leicht zu führen, da alle 3 S. H. M. gl. Kr., also gleich sind.)

172ste Aufg. Man soll auf einer gegebenen L. ein glsch. rwkl. Dr. errichten.

Auflös. AB Fig. 129 sey die L. Ich halbire dieselbe, beschreibe aus ihrem M. P. C mit einer Oeffnung des Zirkels

= ½ L. einen Kr., errichte auf dem M.P. eine rwkl. L. CD, verbinde die End-P. aller 3 L., die in dem Kr. liegen, also A, B, D durch gerade L., so ist das Dr. ABD das verlangte.

Beweis. In den beiden Dr. ADC und DBC ist W. a = b, (weil L. CD rwkl. auf AB gezogen ist), S. AC = BC, DC sich selbst gleich, also 2 S. mit dem W., den sie einschließen, gleich, also die ganzen Dr. =, folglich auch die 3te S. DB und DA in beiden =. Da nun der W. bei D ein r. W. ist, so entspricht Dr. ABD der Bedingung.

173ste Aufg. Man soll auf einer gegebenen L. ein Qu. beschreiben.

Auflös. AB Fig. 130 sey die gegebene L. Zuerst errichte ich auf einem der End-P. A eine rechtwkl. L. AE, mache dieselbe = AB; sodann beschreibe ich aus den End-P. beider L., die nicht zusammen treffen, also aus B und E, mit einer Oeffnung des Zirkels = AE oder AB, 2 Kr., die sich in F schneiden, und verbinde jene beiden End-P. B und E mit F, dem Durchschnitts-P. beider Kr., so ist das Qu. ABFE das verlangte.

Beweis. Daß alle 4 S. = sind, folgt aus der Bildung der Figur; da nun W. a ein r. W. ist, so müssen es auch die übrigen seyn.

Eine andere Auflös. Ich halbire die gegebene L. AB, s. Fig. 119, Taf. X, errichte auf dem M.P. derselben, C, eine rwkl. L. CD = der Hälfte von AB (s. die 150ste Aufg.), beschreibe sodann aus C mit einer Oeffnung des Zirkels = der Entfernung der beiden P. C und A einen Kr., sodann ziehe ich 2 L., nemlich von B durch C nach dem Kr. L. BE, dann von A durch C bis zum Kr. L. AF, und verbinde die 4 P. A, B, F, E im Kr. durch gerade L., so ist ABEF das verlangte Qu.

Beweis. Daß W. a + c ein r. W. ist, ist vorhin (s. die 161ste Aufg.) bewiesen worden; da a + b ein r. W. ist, so sind auch c, d und m r. W., als N.W. und Sch.W. Die L. CA, CB, CE, CF sind H.M. des nemlichen Kr., also =; folglich sind die 4 Dr. ABC, BEC, FEC, FAC =; mithin auch alle 4 ähnlich liegenden S. AB, BF, EF, EA =; in dem Dr. AFB ist W. n und q jeder = ½ r. W., also o + p ein

r. W. u. s. w., mithin ist ABEF eine Figur mit 4 gl. S. und 4 r. W. oder ein Qu., dessen S. = der gegebenen AB sind.

XLI. Stufe. Beschreibung geradliniger Figuren in einen Kreis.

NB. Eine geradlinige Figur nennt man in einen Kr. beschrieben, wenn die Sch. P. aller W. derselben in den Kr. fallen.

174ste Aufg. Man soll innerhalb des Kr. ein gls. Dr. beschreiben, das den Kr. in 3 P. berührt.

Auflös. Das Dr. soll in einen Kr. gezeichnet werden, dessen M. P. A ist (s. Fig. 131); ich beschreibe sodann aus irgend einem P. dieses Kr., z. B. aus B, einen 2ten Kr., ziehe durch die M. P. beider Kr. bis an den 1sten Kr. eine L. BC, verbinde die Dschn.-P. beider Kr. D und E durch L. DE, und mit dem P. C durch die L. CD und CE, so ist Dr. CDE das verlangte gleichseitige Dr. Wer führt den Beweis?

(indem der Lehrer die H. M. AD, AE, BE als Hülfs-L. zieht.)

Lhr. Was für L. sind AC, AD, AE, BE?

Kdr. Es sind H. M. gleicher Kr.

Lhr. Was für ein Dr. ist Dr. ABE?

Kdr. Ein gls.

Lhr. Welches ist nun das Maaß des W. n?

Kdr. W. n = $\frac{2}{3}$ r. W.

Lhr. Wie groß W. c?

Kdr. W. c = $\frac{4}{3}$ r. W. (als N. W. von n).

Lhr. Wie groß ist W. o?

Kdr. W. o = n, also = $\frac{2}{3}$ r. W.

Lhr. Wie groß W. d? — Kdr. W. d = $\frac{4}{3}$ r. W.

Lhr. Also W. c, d, o + n jeder gleich $\frac{4}{3}$ r. W.

Wie wird es nun mit der Gleichheit der 3 Dr. CEA, DEA, CDA beschaffen seyn?

Kdr. Sie sind einander gl., denn in jedem ist ein W. und die beiden ihn einschließenden S. gl.

Sind die Dr. =, so sind auch die ähnlich liegenden S.

=, folglich sind die S. CD, DE, EC =, mithin ist Dr. CDE ein glf. Dr., und da die 3 Sch. P. seiner W. CDE in dem gegebenen Kr. liegen, so ist Dr. CDE das verlangte gleichf. Dr.

(Die Beschreibung eines glschl. rwkl. Dr. in einen Kr. hat keine Schwierigkeit.)

175ste Aufg. Man soll ein Qu. in einem Kr. beschreiben.

Auflös. Man beschreibe zuerst in dem Kr., dessen M. P. A sey (Fig. 132), 2 D. M., BD, EC, die sich unter r. W. schneiden, verbindet die End-P. beider D. M. durch L., so ist das Qu. BCDE das verlangte.

Beweis. Gl. W. desselben Kr. haben gl. Bogen; gl. Bogen haben gl. Sehnen; folglich S. BC, CD, DE, EB gleich. W. c und o, b und d u. s. w. jeder = $\frac{1}{2}$ r. W., also a + b ein r. W., und so die andern W. bei C, D, E ebenfalls r. W.

176ste Aufg. Man soll ein regelmäßiges Sechseck in einen gegebenen Kr. zeichnen.

Auflös. Der Kreis, dessen M. P. A ist (s. Fig. 133), sey der gegebene. Ich beschreibe einen 2ten Kr. von gl. Größe aus irgend einem P. des ersten, z. B. aus B; sodann ziehe ich aus dem M. P. A, durch M. P. B, nach dem P. C des 2ten Kr. L. AC; ferner aus Dschn. P. D durch M. P. B nach G eine zweite L. DG, eben so aus Dschn. P. E durch M. P. B, nach F eine 3te L. EF, verbinde dann die P. D und F, F und C, C und G, G und E, E und A, A und D durch L., so ist Sechseck ADFCGE das verlangte.

Beweis. Die 6 S. BF, BC u. s. w. sind H. M. des nemlichen Kr., wovon B der M. P. ist. AD ist ein H. M. des ersten Kr., wovon A der M. P. ist; beide Kr. sind gleich, folglich sind auch ihre H. M. gleich. Dr. ABD ist ein glf. Dr., weil es von 3 gl. H. M. gebildet wird; mithin jeder W. des Dr. ABD = $\frac{2}{3}$ r. W.; folglich alle übrigen W. der 6 Dr., da es glf. Dr. sind, jeder = $\frac{2}{3}$ r. W. Da nun die 6 Dr. gl. sind, so sind auch alle 6 S. des S. E. gl., und da alle W. der Dr. gleich sind, und jeder W. des S. E. 2 W. eines Dr. enthält, so sind auch alle 6 W. des S. E. gl., folglich ist das

S. E. ADFCGE das verlangte regelmäßige Sechseck, dessen 6 Sch. P. in dem gegebenen Kr. liegen.

XLII. Stufe. Beschreibung geradliniger Figuren um einen Kreis.

NB. Eine geradlinige Figur heißt um einen Kreis beschrieben, wenn jede S. derselben eine Ber. L. des Kreises ist.

177ste Aufg. Man soll ein glf. Dr. um einen gegebenen Kr. beschreiben.

Auflös. Der Kr., dessen M. P. A ist, sey der gegebene (Fig. 134). Ich beschreibe aus irgend einem P. desselben, z. B. aus B, einen 2ten Kr. = dem ersten; sodann ziehe ich von A durch B eine L. nach C, die folglich ein D. M. des 2ten Kr. ist. Ferner aus A (dem M. P. des ersten Kr.) mit einer Oeffnung des Zirkels = dem D. M. AC einen 3ten Kr.; endlich ziehe ich aus C durch die Dschn. P. der beiden gl. Kr., durch E und F, bis an den 3ten großen Kr. 2 L., CG und GH, und verbinde die P. G und H, d. h. die P., wo diese L. den Kr. berühren, durch eine 3te L. GH, so ist Dr. CGH das verlangte.

Beweis. Ich ziehe aus A nach G und H die H. L. AG und AH, so sind bei A 3 gleiche st. W.; ferner sind die L. AG, AC, AH, als H. M. eines und des nemlichen Kr. gleich; also sind in den 3 Dr. GHA, GCA, CHA, 2 S. und der W., den sie einschließen =, folglich die ganzen Dr. und also auch die den st. W. gegenüber liegenden S. CH, GC, GH =; mithin Dr. GHC ein glf., das, nach seiner Bildung, den gegebenen Kr., dessen M. P. A ist, in den P. E, F, D berührt, also um denselben beschrieben ist.

178ste Aufg. Man soll um einen Kreis ein Qu. beschreiben.

Auflös. Ich beschreibe in dem gegebenen Kr., dessen M. P. C ist (s. Fig. 135), 2 D. M., AB und DG, die sich unter r. W. schneiden; sodann ziehe ich auf die End-P. dieser D. M. 4 Ber. L. (EF, FI, IL, LE), so bilden diese Ber. L. das verlangte Qu. EFIH.

Beweis. Da bei A, G, B, D r. W. sind, eben so bei C, so sind die L. EL, GD, IF, ferner EF, AB und LI gll., daher ist EFIL sowohl, als EGAC, GFBC, CBDI und ACDL jedes ein Pgr. Ferner sind die L. AB und GD als D.M. des nemlichen Kr. =, also auch L. EF, LI, FI und EL gl., das Pgr. EFIL also ein glf. Nun ist W. a (als in dem Pgr. EGCA dem r. W. b gegenüberstehend) ein r. W., eben so W. c; folglich auch m und n, also ist EFIH eine Figur, die 4 gl. rwkl. verbundene S. hat, mithin ein Qu., und zwar um den Kr., dessen M.P. C ist, beschrieben, da alle S. des Qu. den Kr. berühren.

XLIII. Stufe. Beschreibung eines Kr. um eine geradlinige Figur.

NB. Ein Kr. heißt um eine geradlinige Figur beschrieben, wenn derselbe die Sch.P. aller W. der Figur trifft.

179ste Aufg. Man soll um ein gegebenes Dr. (ABC Fig. 136) einen Kr. beschreiben.

Auflös. Ich halbire 2 S. des Dr., z. B. AC, AB; auf der Mitte jeder S. in D und E errichte ich die rwkl. L. EF und DF, die sich in dem P. F schneiden; sodann beschreibe ich aus diesem P. F nach dem Sch.P. des W., den beide getheilte S. des Dr. bilden (also nach A), eine L. AF; endlich beschreibe ich aus F, mit einer Oeffnung des Zirkels = AF (oder gleich der Entfernung des Dschn.P. von dem Sch.P. ꝛc.), einen Kr., so berührt er die Sch.P. aller 3 W. des Dr. ABC.

Beweis. Da der Dschn.P. F entweder innerhalb oder außerhalb des Dr., oder in dessen 3te S. fallen kann, so müssen wir diese 3 Fälle hier unterscheiden:

1) Der Ver.P. der beiden rwkl. L. fällt innerhalb des Dr., dann ziehe ich aus F die beiden L. FB und FC nach den Sch.P. der beiden andern W. des Dr.; sodann ist in den beiden Dr. AEF und BEF, AE = BE, EF sich selbst gl., W. a = b, also die ganzen Dr. gl., mithin AF = BF, eben so AF = CF; CF = BF, mithin

alle 3 L. AF, BF, CF =; mithin berührt ein Kr., aus F mit AF beschrieben, alle 3 P. A, B, C, und ist also um das Dr. ABC beschrieben.

2) Der Vereinigungs-P. fällt außerhalb des Kr., ABC sey das Dr. (s. Fig. 137), DF und EF die aus der Mitte der S. AC und AB gezogenen rwkl. L.; F ihr Ver. P., so ziehe ich aus F auch nach B und C die L. FB und FC, es ist dann leicht zu zeigen, daß BF = AF, eben so CF = AF; daß also BF, AF, CF gleich sind, daß folglich ein Kr. aus F mit AF beschrieben, die Sch. P. A, B, C aller 3 W. des Dr. ABC trifft.

3) Der Ver. P. F fällt in die 3te S. des Dr. ABC (Fig. 138), dann ist, da AD = BD, DF sich selbst gl.; die W. bei D r. W., auch AF = BF; eben so CF = AF; also alle 3 S. BF, AF, CF =, mithin berührt ein Kr., mit AF beschrieben, alle 3 Sch. P. der W. des gegebenen Dr., und ist also um dasselbe beschrieben.

180ste Aufg. Man soll um ein Qu. ABCD einen Kr. beschreiben. (s. Fig. 139.)

Auflös. Ich ziehe in dem Qu. 2 Eck-L. CB und AD, aus dem Dschn. P. derselben, aus E, beschreibe ich mit der Hälfte einer Eck-L., z. B. mit EA, einen Kr., so ist dieser um das Qu. beschrieben.

Beweis. Die 4 L. EA, EB, EC, ED sind gleich (s. die 78ste Aufg.), folglich geht der Kr. aus dem P. E mit irgend einer dieser L., z. B. mit EA beschrieben, auch durch die übrigen End-P. der andern L., also durch B, C und D, die zugleich die Sch. P. der W. des Qu. sind, und ist also um das Qu. ABCD beschrieben.

XLIV. Stufe. Beschreibung eines Kreises in eine geradlinige Figur.

181ste Aufg. Man soll in ein gegebenes Dr. einen Kr. beschreiben. (ABC Fig. 140 sey das Dr.)

Auflös. Ich theile 2 W. des Dr., z. B. die W. bei B und C, mittelst zweier L. CD und BD, in 2 gl. Th. Aus

dem Ber. P. beider ziehe ich auf alle S. des Dr. rwkl. L., DE, DF, DG; beschreibe aus D oder aus dem P., der allen dreien gemeinschaftlich ist, mit einer derselben, z. B. mit DE, einen Kr., so ist dieser Kr. in das gegebene Dr. beschrieben.

Beweis. Die L. DE, DF, DG sind sich gl. ((s. die 62ste Aufg.) Da nun D der M. P. des mit einer der L. beschriebenen Kr. ist, und dessen H. M. mit den S. des Dr. rwkl. verbunden sind, so sind die S. des Dr. Ber. L. des Kr.; der Kr. ist also in das Dr. beschrieben.

182ste Aufg. Man soll in ein gegebenes Qu. einen Kr. beschreiben. (EFLI Fig. 135 sey das Qu.)

Auflös. Ich theile 2 angrenzende S. des Qu. jede in 2 gl. Theile, z. B. LI und FI, ziehe aus ihrer Mitte mit den gedachten S. gll. L. AB und GD, so ist C der Dschn. P. dieser beiden L. und zugleich der M. P. des Kr., den ich zu beschreiben habe, und den ich erhalte, wenn ich aus C mit einer der 4. L. CA, CB, CG oder CD einen Kr. beschreibe.

Beweis. Daß diese 4 L. gl. sind, ist vorhin gezeigt worden (s. die 180ste Aufg.), folglich geht ein Kr. mit einer dieser L., z. B. mit CG. beschrieben, durch alle andern P. B, D, A, bei denen die H. M. CG u. s. w. mit den Ber. L. EF, FI u. s. w., oder mit den S. des Qu. r. W. bilden, berührt also alle 4 S. des Qu.

XLV. Stufe. Verhältnisse der Linien in und am Kreise.

183ste Aufg. In einem Kr. sind zwei sich schneidende Sehnen gezogen, und dann ihre End-P. durch zwei andere Sehnen so verbunden, daß zwei Scheitel-Dr. gebildet werden. Es frägt sich, wie sich diese zerschnittenen L. verhalten?

Auflös. In Fig. 63, Taf. XIV seyen ad und bc die beiden sich schneidenden Sehnen; ab und cd aber die beiden, die End-P. verbindenden Sehnen. Sind die beiden Dr. gleich?

Kdr. W. ced = W. aeb; denn es sind Sch. W.

Lhr. Gut. Wer kann die anderen W. bestimmen?

(Vielleicht finden es die Kdr. selbst; sonst führe sie der Lhr. darauf.)

Auf welchem Bogen steht W. bad?

Kdr. Auf dem Bogen bd; auf dem steht auch der W. bcd, folglich ist W. bad = W. bcd, und aus demselben Grunde ist auch W. abe = W. adc.

Lhr. Richtig! Also sind beide Dr. einander ähnlich, und in ähnlichen Dr. verhalten sich alle S.? —

Kdr. Wie zwei den gl. W. gegenüber liegende S.

Lhr. Richtig! Macht jetzt einmal den Schluß.

Kdr. Weil die Dr. ähnlich sind, so ist ae der eben so vielte Theil von ec als ab von cd, und auch eb der eben so vielte Theil von ed als ab von cd.

Lhr. Wir können auch sagen: ae sey der eben so vielte Theil von ec als eb von ed, und das wird jederzeit geschehen, wenn wir auch die Sehnen ab und cd nicht ziehen. Was haben wir dadurch für einen Satz gefunden.

Kdr. Zwei Sehnen schneiden sich immer verhältnißmäßig.

Lhr. Und zwar so, daß das eine Stück der einen L. zu einem Stück der andern L. ist, wie das andere Stück der anderen L. zum anderen Stück der ersten.

Der Lehrer muß dies durch mehrere Beispiele deutlich machen, und kann dann auch statt der einen Sehne einen D.M. ziehen, und diesen von einer Sehne rwkl. kreuzen lassen. Fig. 64, Taf. XIV.

Lhr. Ich ziehe die L. ac und bd; sind jetzt die beiden Dr. wieder ähnlich?

Kdr. Ja, denn die beiden Sch. W. sind gleich, und jetzt rechte W.; — der W. cbd = W. dac, weil beide auf dem gl. Bogen stehen; folglich ist auch W. ace = W. adb.

Lhr. Richtig! Wie verhalten sich nun die S.?

Kdr. ae ist der eben so vielte Theil von ec, als eb von ed.

Lhr. Gut. Wir wollen dies auf diese Weise an die Tafel schreiben: ae : ec = eb : ed. Statt ec werden wir aber wohl auch eb setzen können?

Kdr. Ja, denn bc ist eine Sehne, die auf dem D. M. rwkl. steht. Sie ist deswegen in 2 gl. Theile getheilt, und also ec = eb.

Lhr. Richtig! Wir wollen dies jetzt thun. Sprecht es aus!

Kdr. ae ist der eben so vielte Theil von eb, als eb von ed.

Lhr. Schreibt es an die Tafel.

Kdr. ae : eb = eb : ed.

Lhr. Das ist nun überall im Kreise der Fall, wir mögen den D.M. durch die rwkl. Sehne bc durchschneiden, wo wir wollen. Man sagt deswegen von der L. eb: sie sey die mittlere Proportionallinie zwischen ae und ed. Sie hat zugleich die Eigenschaft, daß das Qu., das man auf ihr errichtet, so groß ist, als das R.E. aus den beiden L. ae und ed, und man kann durch sie ein R.E. in ein Qu. verwandeln. Den Beweis würdet ihr aber wohl so leicht nicht finden. Wir wollen ihn einmal gemeinschaftlich suchen. Gebt daher Acht. (Der Lehrer zeichnet Fig. 65, Taf. XIV an die Tafel.)

ad ist ein D.M., eb eine darauf rwkl. stehende halbe Sehne, die also nach dem Vorigen eine mittlere Proportionallinie zw. ae und ed ist; ef mache ich = ae und zeichne damit das R.E. efhd; wir wollen jetzt den Flächeninhalt desselben mit dem Qu. von be vergleichen. Zu dem Ende habe ich auf be das Qu. bnoe und auf ac das Qu. acmk errichtet, und die L. ef bis l verlängert, und dann von b nach c die L. bc gezogen. Wir wollen nun das R.E. efhd mit dem Qu. auf ac vergleichen.

Kdr. Das R.E. aekl ist = dem R.E. cghd, denn ak = cd und ae = ef.

Lhr. Wenn ich das Stück efgc zu beiden Stücken hinzusetze, bleibt alles gleich?

Kdr. Ja, denn es ist Gleiches zu Gleichem hinzugesetzt; daher ist aelk + ecgf = dem R.E. efhd, und es ist das Qu. acmk um das Qu. fgml größer als das R.E. efhd.

Lhr. Ist fgml ein Qu?

Kdr. Ja, denn el = ac und ae = ef, daher ac — ae = el — ef oder fg = fl.

Lhr. Gut. Wir wollen nun dieses Qu. zu dem erst gefundenen Gleichen hinzusetzen, nemlich zu aelk + ecgf, und zum R.E. efhd.

Kdr. Dann ist das Qu. acmk = dem R.E. efhd + dem Qu. fgml.

Lhr. Die L. bc ist aber = ac; ihr Qu. also auch so groß als das Qu. acmk; — nicht so?

Kdr. Ja, oder so groß als das R.E. efhd + □ fgml.

Lhr. bc ist aber Hypotheñuse eines rwkl. Dr. — Wir können das Qu. von bc daher noch anders bezeichnen.

Kdr. Ja; das Qu. von bc ist so groß als das Qu. von be + Qu. von ec.

Lhr. Das Qu. von ec ist = dem Qu. fgml. Wir wollen die kürzere Bezeichnungsart gebrauchen, und sagen: □ bc = □ eb + □ ec. Wie groß war Qu. bc außerdem?

Kdr. Wie das R.E. edhf + □ ec.

Lhr. Daher wird auch □ be + □ ec = seyn dem R.E. efhd + □ ec. Nun wollen wir von beiden das Qu. ec wegnehmen; was bleibt?

Kdr. Es bleibt Gleiches übrig, nemlich □ eb = dem R.E. efhd.

Lhr. Das ist es, was wir beweisen wollten. Wenn wir daher ein R.E. wie efhd in ein eben so großes Qu. verwandeln sollten, so würden wir die S. ed verlängern, und ae = ef machen. Dann theilten wir die L. ad bei c in 2 gleiche Theile, machten von da aus mit dem H.M. ca einen halben Kreisbogen, und verlängerten nun die L. fe bis b; alsdann wäre be die S. desjenigen Qu., welches eben den Flächenraum hat, als das R.E. efhd.

184ste Aufg. Zwei Sehnen in einem Kr. können sich auch erst außerhalb des Kr. schneiden; es frägt sich, ob sodann die außerhalb liegenden Stücke zu denen innerhalb des Kr. ein bestimmtes Verhältniß haben?

Auflös. Fig. 66, Taf. XIV sey der Kr., außerhalb dem die Sehnen bd und ce sich in a schneiden. Man ziehe de und bc. Nun ist W. dec + dbc = 2 r. W., weil es gegenüber liegende Viereckswinkel im Kr. sind; W. dec + W. dea sind auch = 2 r. W.; folglich ist W. dea = W. dbc. — Der W. bac ist im Dr. dae eben so groß als im Dr. cab, und eben so ist W. ade = W. acb, daher sind die beiden Dr. dae und cab ähnlich. Den gleichen W. gegenüber liegen nun

auch die verhältnißmäßigen S.; daher ist ae der eben so vielte Theil von de als ab von bc; oder ad : de = ac : bc; ferner ae : ad = ab : ac, d. h. das außenliegende Stück der einen Linie ist der eben so vielte Theil des außenliegenden Stücks der anderen Linie, als die ganze andere Linie von der ganzen ersten.

Es kann auch der Fall vorkommen, daß die eine Sehne ganz aus dem Kr. herausrückt und den Umkreis blos in einem P. berührt, folglich eine Ber.-L. wird. Fig. 66 stellt zugleich diesen Fall vor; ec ist die eine Sehne, ag die Ber.-L., welche sich mit der vorigen erst in a schneidet. Man ziehe die H. L. ef und fc, so entstehen wieder ein Paar ähnliche Dr., nemlich afe und acf. Denn der W. eaf ist beiden Dr. gemeinschaftlich; der W. efa ist aber = dem W. fca (s. die 62ste Fig.), folglich ist W. fea = W. cfa. Demnach verhält sich ae : ef = af : fc, oder af : ef = ac : cf und ae : af = af : ac. Die L. af ist demnach abermals die mittlere Proportionallinie zwischen ae und ac, und ein Qu. auf af ist gleich dem R. E., das die L. ae und ac zu Seiten hat.

XLVI. Stufe. Das Fünfeck.

Lhr. Wir haben gelernt, wie man Dreiecke, Quadrate und Sechsecke sowohl in als um den Kreis machen kann. Eben so wissen wir sie auch ohne den Kreis zu beschreiben. Ein regelmäßiges Fünfeck können wir aber noch nicht machen. Auch ist es schwerer als die vorigen Figuren; ihr müßt daher recht Acht geben. Wir wollen versuchen, ob wir selbst herausfinden können, was dazu nöthig ist.

185ste Aufg. Ich werde jetzt ein Fünfeck an die Tafel zeichnen, von welchem wir annehmen wollen, daß es ein regelmäßiges Fünfeck sey. (Siehe Fig. 101, Taf. XVII.) Die Ecken wollen wir mit abcde bezeichnen. Ich ziehe sodann in demselben die Linien ac und ad. Wer kann mir die Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks angeben?

Kdr. Es hat lauter gleiche Seiten, und jeder Winkel ist $\frac{6}{5}$ eines rechten W.

Lhr. Gut. In wie viel Dr. habe ich es getheilt?

Kdr. In drei.

Lhr. Was sind das für Dreiecke in Hinsicht auf Gleichheit der Seiten?

Kdr. Es sind gleichsch. Dr. — Denn in dem Dr. abc ist S. ab = bc, und in dem Dr. aed ist ae = ed. Die S. ac ist = ad.

Lhr. Das Letztere habt ihr nicht bewiesen.

Kdr. Ja, die Dr. abc und aed sind einander gleich. Wir haben in jedem zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, nemlich ab, bc und W. abc, und ae, ed und W. aed, welche beide W. Fünfeckswinkel oder $\frac{6}{5}$ eines r. W. sind; daher sind auch die dritten Seiten ac und ad gleich.

Lhr. Richtig! Wer kann mir die Größe der Winkel in diesen Dreiecken angeben?

Kdr. In jedem Dr. sind alle W. gleich zwei rechten W. — Da nun W. aed = $\frac{6}{5}$, so sind die beiden andern W. des Dr. zusammen = $\frac{4}{5}$ eines r. W. — Das Dr. ist aber glsch., daher der eine so groß als der andere, folglich W. dae oder W. ade = $\frac{2}{5}$ eines r. W. In dem Dr. abc ist es eben so. — Weil nun der W. bae = $\frac{6}{5}$, jeder von den W. bac und dae = $\frac{2}{5}$, so bleiben für den Winkel cad ebenfalls $\frac{2}{5}$, folglich für die beiden W. acd und adc $\frac{8}{5}$. Da das Dr. cad aber ebenfalls glsch. ist, so sind diese beiden W. einander gleich, und jeder von ihnen = $\frac{4}{5}$ eines r. W.

Lhr. Richtig! Das Dr. cad ist daher ein glsch. Dr., in welchem jeder W. an der Grundlinie doppelt so groß ist, als der an der Spitze. Gesetzt, wir könnten solch ein Dr. beschreiben, wäre es dann schwer, ein regelmäßiges Fünfeck zu zeichnen?

Kdr. Nein. Man brauchte dann nur auf den beiden Schenkeln ac und ad gleichsch. Dr. zu beschreiben, deren gleiche Schenkel ad, ed, cb, ba = der Seite cd wären. Das ist aber nicht schwer zu machen.

Ein Kind. Ich dächte, die ganze Aufgabe könnte nicht schwer seyn. Denn man braucht ja nur einen Winkel wie cad zu machen, der $\frac{2}{5}$ eines r. W. ist; dann macht man die Schenkel desselben gleich groß, und zieht die Endpunkte durch eine L. zusammen, so hat man das Dr. cad, denn die W. an der

Grundlinie sind nun von selbst jeder so groß, als $\frac{4}{5}$ eines r. W. - Auf die gleichen Sch. des Dr. setzt man nun mit der kürzesten Seite des Dr. die beiden glsch. Dr., wie vorher gesagt wurde, dann ist das Fünfeck fertig.

Lhr. Du hast recht, und es läßt sich gegen dein Verfahren nichts einwenden. Kannst du mir aber wohl sagen, wie man einen Winkel macht, der so groß ist, als $\frac{2}{5}$ eines rechten W.?

Kd. Man muß einen rechten W. in fünf gl. Theile theilen und 2 davon nehmen.

Lhr. Wie theilt man einen r. W. in fünf gleiche Theile?

Kd. Man setzt den Zirkel in die Spitze des Winkels, schlägt zwischen seinen Sch. einen Kreisbogen, theilt den in fünf gleiche Theile und zieht vom zweiten Theilungspunkte nach der Spitze des Winkels eine Linie, dann hat man einen W., welcher $\frac{2}{5}$ eines r. W. ist.

Lhr. Du hast mir nicht gesagt, wie man den Bogen in fünf gleiche Theile theilt.

Kd. Man probirt mit dem Zirkel so lange, bis es paßt.

Lhr. Das heißt, bis der Fehler so klein ist, daß man ihn mit dem Auge nicht mehr wahrnehmen kann. Man kann sich dieser Theilung in vielen Fällen bedienen, aber völlig genau ist sie nicht, es ist keine geometrische Theilung. Diese aber ist es, welche wir aufsuchen wollen. Als wir einen W. in zwei gleiche Theile theilten, hätten wir es auch mit dem Zirkel durch bloßes Versuchen thun können.

Wir haben aber doch eine genauere Theilung gefunden, und so wird es sich auch bei unserer jetzigen Aufgabe verhalten. Einen W., der $\frac{2}{5}$ eines r. W. ist, können wir nicht anders machen, als indem wir ein glsch. Dr. zeichnen, dessen W. an der Grundl. doppelt so groß sind, als der an der Spitze.

Kdr. Das ist das Dr. cad; das können wir aber doch ohne den Winkel cad nicht machen?

Lhr. Wir wollen sehen. Laßt uns erst die Eigenschaften dieses Dreiecks näher untersuchen.

(Er zeichnet Fig. 102, Taf. XVII an die Tafel.) Gesetzt, cad wäre ein solches Dr. Ich theile den Winkel acd durch die L. cf in zwei gl. Th.; wer kann die Winkel bestimmen?

Kdr. Der W. acf = dcf, nemlich jeder ist $\frac{2}{5}$; daher ist W. cfd = $\frac{4}{5}$ und cfa $\frac{6}{5}$ eines r. W.

Lhr. Gut. In jedem dieser Dr. sind daher zwei gl. W.; daher werden auch zwei gl. S. vorhanden seyn. Welche? —

Kdr. cd = cf, und cf = af; daher sind diese drei Linien gleich.

Lhr. Richtig! Es sind auch ein Paar ähnliche Dreiecke vorhanden.

Kdr. Ja; Dr. fcd ist ähnlich dem Dr. dac, denn die W. sind gleich.

Lhr. Daher wird die kleine S. des kleinen Dr. der eben so vielte Theil von der einen seiner gleichen Seiten seyn, als die kleine S. des großen Dr. von einer seiner gleichen Seiten. Wer will das durch Buchstaben ausdrücken und an die Tafel schreiben?

Ein Kind schreibt an die Tafel: df : cd = cd : ac.

Lhr. Das ist richtig. Mußte ich gerade diese Seiten nehmen?

Kdr. Nein; statt cd konnte man auch cf oder af nehmen, denn sie sind einander gleich, und statt ac konnte ad genommen werden.

Lhr. Ich werde den Satz hiernach ändern und schreiben: df : af = af : ad. Ist das richtig? — Kdr. Ja!

Lhr. af ist daher die mittlere Proportional-L. zwischen df und ad. Daher ist das Qu. von af so groß, als das Rechteck, welches mit df und ad beschrieben wird. (Vergl. die 183ste Aufg.) Wie ist die L. ad demnach getheilt?

Kdr. Die L. ad ist so getheilt, daß das R. E. aus der ganzen L. und aus dem einen Theil derselben df = ist dem Qu. des anderen Th. der L. af.

Lhr. Können wir eine L. so theilen?

Kdr. Ja, das haben wir in der 134sten Aufg. gehabt.

Lhr. Wer will diese L. so theilen? (Er zeichnet eine waagrechte L. an die Tafel, Fig. 103, ad.)

Ein Kind. Ich mache erst das Qu. der L. ad, nemlich abcd, theile ab bei e in zwei gl. Theile, ziehe die L. de, mache dann ge so groß als de, und fa so groß als ga, so ist die L. ad auf die verlangte Weise getheilt. (Vergl. die 134ste Aufg.)

Der Lehrer kann den Satz nochmals beweisen lassen, und fahre dann fort:

Lhr. Es ist also df × da = dem Qu. von fa. Die L. ist daher getheilt, wie ad in Fig. 102. (Er löscht alle Hülfslinien fort, so daß nur die getheilte L. da stehen bleibt.)

Was ist nun weiter zu thun?

Kdr. Wir nehmen die L. fa, und errichten damit auf df ein gleichsch. Dr. dfc (Fig. 104), und ziehen nun die Punkte c und a zusammen, so ist das Dr. fertig.

Lhr. Gut. Könnt ihr mir nun wohl beweisen, daß in diesem Dreiecke der Winkel cad halb so groß ist, als einer der beiden andern Winkel des Dr. cad?

Kdr. Seite cd = cf, denn wir haben jede so groß gemacht als fa; daher ist Dr. cdf ein glsch. Dr.

Lhr. Gut. Wie war die L. da getheilt?

Kdr. So, daß df : fa = fa : da.

Lhr. Können wir statt mehrerer dieser Ausdrücke andere Buchstaben setzen?

Kdr. Ja; df : dc = dc : da, denn de = fa.

Lhr. Gut. df ist die Grundl. des kleinen Dr. dcf; dc ist eine von seinen gleichen Seiten und zugleich die Grundlinie des Dr. cad; da ist eine von den gl. S. des gr. Dr. cad. Beide Dr. haben den Winkel cda gemeinschaftlich, welches zugleich der von den ähnlichen Seiten eingeschlossene W. ist. Wären die Seiten gleich, so würden auch die Dreiecke gleich seyn; da die Seiten aber ähnlich sind und eine Verhältniß-Gleichung oder Proportion bilden, so müssen auch die Dreiecke ähnlich seyn. Was folgt daraus?

Kdr. Weil das kl. Dr. dcf ein glsch. Dr. ist, das große Dr. dac ihm aber ähnlich, so muß dasselbe ebenfalls ein glsch. Dr. seyn, oder ca = da.

Lhr. Wer bestimmt nun die Winkel?

Kdr. cf = fa, denn wir haben beide gleich gemacht; daher ist W. fca = W. fac. — W. cfd ist als A. W. so groß als beide zusammen, und hat daher 2 Theile wie caf 1; eben so groß ist auch W. cda, denn cd = cf; weil aber ca = da, so ist W. dca eben so groß als W. cda oder efd, und hat auch 2 Theile, wie W. fca oder fac 1 hat, oder ist doppelt so groß, als W. fca. — In dem Dr. dac hat daher der W. dac 1 Theil wie jeder der andern 2; daher sind die W. an der Grundl., einzeln genommen, doppelt so groß als

der an der Spitze. Alle drei W. haben 5 Theile wie W. dac 1, alle 5 betragen 2 r. W.; folglich ist W. dac $\frac{1}{5}$ von 2 r. W., oder $\frac{2}{5}$ eines r. W., und jeder der andern $= \frac{4}{5}$ eines r. W.

Lhr. Richtig! Was ist nun zu thun?

Kdr. Jetzt machen wir mit der L. cd über ca und da glsch. Dreiecke.

Lhr. Gut. Wir können aber auch so verfahren: wir ziehen von a aus eine L. gll. mit cf (Fig. 105), und von c aus eine gll. mit fa, so erhalten wir die L. ce, ae; eben so ziehe ich eine L. db gll. mit ca, mache sie so groß als ce, und verbinde dann die Punkte b und a durch die L. ba, so ist das Fünfeck fertig.

(Die Eigenschaften des Dr. acd, Fig. 102, konnte der Lehrer auch auf folgende Weise auffinden lassen, nachdem der W. acd in zwei gleiche Theile getheilt worden war.)

Lhr. Wir wollen durch die Spitzen des Dr. afc einen Kreis beschreiben. Wie findet man den Mittelpunkt dieses Kr.?

Kdr. Man muß jede der Seiten af und fc in 2 gl. Theile theilen, und von den Theilungspunkten senkrechte Linien aufrichten, welche sich in dem Mittel-P. des Kr. schneiden werden.

Lhr. Das wollen wir thun. (Es wird daraus Figur 106 entstehen, nachdem er von dem Punkt g die L. ga, gf und gc gezogen und mit ihnen als Halbmessern den Kreis gemacht hat.)

Lhr. Sind die beiden Dr. fga und fge gl.?

Kdr. Ja, denn af = fc, weil das Dr. afc ein glsch. Dr. ist; ga = gc als Halbmesser des Kreises, und gf ist beiden Dr. gemeinschaftlich. Daher sind in beiden Dr. die Seiten gleich, folglich auch die ganzen Dreiecke.

Lhr. Wer kann die W. dieser Dr. bestimmen?

Kdr. Beide Dr. sind glsch. Dr., denn die Halbmesser sind ihre gleichen Sch. — Folglich ist gaf = gfa und gfc = gcf; weil aber die beiden Dr. gl. sind, so sind auch diese vier W. gleich, und W. afc ist durch gf in 2 gl. Theile getheilt.

Lhr. Wie groß ist jeder W.?

Kdr. W. afc war $= \frac{6}{5}$, daher ist afg oder gfe $= \frac{3}{5}$, und eben so groß W. gcf oder W. gaf.

Lhr. Und wie groß war der W. fcd?

Kdr. $\frac{2}{5}$, denn wir hatten den W. acd, welcher $\frac{4}{5}$ ist, in 2 gleiche Th. getheilt.

Lhr. Wie groß wird daher der W. gcd seyn?

Kdr. $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$, also $\frac{5}{5}$ oder ein r. W.

Lhr. Richtig! Die L. gc steht daher senkrecht auf cd; da gc aber ein Halbmesser des Kr. ist, so muß cd eine Berührungslinie desselben seyn. Jetzt ist also vom Punkte d aus eine Linie da gezogen, welche den Kr. bei f und a durchschneidet, und eine andere L. dc, welche den Kr. bei c berührt. In welchem Verhältnisse stehen diese L. zu einander?

Kdr. Das Qu. der L. cd ist gleich dem Rechtecke aus der ganzen L. ad und der L. df.

Lhr. Ich kann statt der L. cd die gleich große af setzen; wie heißt es nun? —

Kdr. Das Qu. des Stückes af ist gleich dem R. E. aus der ganzen L. ad und dem Stücke df. (184ste Aufg.)

Lhr. Wie können wir nun eine L. so theilen, daß die zerschnittenen Stücke dies Verhältniß haben?

(Hier kann der Lehrer nun die Theilung vornehmen lassen, wie vorhin und durch die Figur 103 angegeben ist. Hält er es für angemessen, so kann er den Kindern zur Lösung dieser Aufgabe auch folgendes Verfahren angeben:)

Die L. da (Fig. 107) soll durch einen Punkt f so getheilt werden, daß $da \times df = \square fa$.

Auflös. Man ziehe die L. bd rechtwinklich auf da, mache sie halb so groß als da, und ziehe die L. ba. Man mache von b aus mit dem Halbm. bd einen Kreisbogen dc, so ist $bc = bd$. Dann mache man von a aus mit dem Halbmesser ac den Bogen cf, so daß $af = ac$. Jetzt ist f der gesuchte Punkt, und die Linie ad auf die angegebene Weise getheilt.

Beweis. Man errichte auf jeder Seite des Dr. dab das Quadrat derselben (Fig. 108), ziehe von den Punkten f und c Linien, mit den Seiten der zugehörigen Qu. gll., mache $bq = bc$ und $dp = df$, und ziehe von diesen Punkten ebenfalls zwei mit den Seiten des Qu. gll. L. — Die beiden großen Qu. werden hierdurch jedes in 4 Stücke zerschnitten, die wir der Kürze wegen jedes mit einem besondern Buchstaben bezeichnen wollen.

Nun ist $\square ba = \square da + \square bd$; daher sind die Stücke $l + m + n + o = e + g + h + i + k$. Weil aber $bd = bc$ ist, so ist auch $k = l$. Nehmen wir diese beiden

Stücke von dem Vorigen weg, so ist

$$m + n + o = e + g + h + i.$$

Die Stücke $m + n$ sind so groß als $2\,ba \times ca$; bc ist aber halb so groß als da, 2 bc sind folglich eben so groß als da, und $2\,bc \times ca$ kann ich daher auch schreiben $da \times ca$, oder ein R.E. aus den L. ca und da ist eben so groß als die beiden Stücke $m + n$; daher $m + n = ca \times da$. Statt der oben stehenden Gleichung kann ich folglich schreiben

$$ca \times da + o = e + g + h + i.$$

Weil nun $ca = fa$, so kann auch letzteres für das erste gesetzt werden, oder

$$fa \times da + o = e + g + h + i.$$

Es ist aber $fa \times da =$ dem R.E. $h + i$.

Nehme ich auf der einen Seite $fa \times da$, und auf der andern $h + i$ weg, so habe ich Gleiches von Gleichem weggenommen; daher ist $o = e + g$.

Nun ist aber $e + g =$ dem R.E. $da \times df$, daher

$$o = da \times df.$$

Weil aber $o = i$, also gleich dem $\square fa$, so ist $\square fa = da \times df$.

186ste Aufg. Man soll ein regelmäßiges Fünfeck in einen gegebenen Kreis beschreiben.

Auflös. Es sey cdfge Fig. 109 der gegebene Kr. Man ziehe die Berührungsl. ab an den willkührlich angenommenen Punkt g, mache den W. dgb so groß als der W. cda in Fig. 104 ist, und eben so den W. cga, indem man die L. gc und gd bis an c und d zieht; man verbinde dann die P. c und d durch die L. cd, setze den Zirkel in c, öffne ihn bis d und durchschneide damit den Kreis bei e; eben so setze man den Zirkel in d, und durchschneide mit derselben Weite den Kreis bei f, verbinde nun die P. gec und gfd durch die L. ge, ec, df und fg, so ist das Fünfeck fertig.

Beweis. Man wird ihn ohne Schwierigkeit finden, wenn man nur erwägt, daß der W. $gcd = dgb$ und W. $cdg = cga$ (siehe die 156ste Aufg.), nemlich $\frac{4}{5}$ eines rechten W.

187ste Aufg. Man soll ein regelmäßiges Fünfeck um einen gegebenen Kreis beschreiben.

Auflös. Man verfährt wie vorher, und bestimmt sich die Punkte g, e, c, d, f, Fig. 109. An diese zieht man Berührungslinien, bis sie einander schneiden.

188ste Aufg. Man soll in ein gegebenes regelm. Fünfeck einen Kreis beschreiben.

Auflös. Zwei Seiten, wie ae und ab Fig. 110, werden bei g und h in zwei gleiche Theile getheilt, und von den Theilungspunkten senkrechte L., gf und hf, errichtet, bis sie einander schneiden. Dann ist f der Mittelpunkt des Kreises, und gf oder hf dessen Halbmesser.

189ste Aufg. Man soll um ein gegebenes regelmäßiges Fünfeck einen Kreis beschreiben.

Auflös. Man verfährt wie vorher, und zieht die L. af, so ist diese der Halbmesser des Kreises und f der Mittelpunkt.

XLVII. Stufe. Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise.

Lhr. Wenn man ein Vieleck in einen Kreis beschreibt, so kommen die Seiten desselben um so näher an die Kreislinie, je mehr Seiten dasselbe hat. So liegen z. B. die Seiten des Sechsecks näher an der Kreislinie, als die Seiten eines in denselben Kreis beschriebenen Vierecks, die Seiten des Zwölfecks näher, als die des Sechsecks. Je mehr Punkte des Vielecks in den Kreis fallen, oder was dasselbe ist, je mehr Seiten das Vieleck hat, um so mehr nähern sich die Seiten desselben der Kreislinie; ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten würde seine Seiten in der Kreisl. selbst zu liegen haben. Man kann daher den Kreis als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten betrachten.

Wenn man nun das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser suchen soll, so wird man dies auf die Weise finden können, wenn man den Umfang eines Vielecks mit so viel Seiten, daß es vom Kreise nicht merklich abweicht, sucht, und dazu den Durchmesser als Maß benutzt.

Wir wollen dies thun, und mit dem Sechsecke anfangen.

Wir haben aus der 175sten Aufg. gesehen, daß die Seite eines in den Kreis beschriebenen Sechsecks so groß ist, als der Halbmesser des Kreises. Alle 6 Seiten, oder der Umfang des Sechsecks ist daher 6 mal so groß als der Halbmesser, oder 3 mal so groß als der Durchmesser.

Fig. 111 sey nun ein in den Kreis beschriebenes Sechseck.

Man theile die eine Seite desselben, ac, bei g in 2 gleiche Theile, ziehe vom Mittelpunkte e die Linie eg und verlängere sie bis f, wo sie den Kreis schneidet, und ziehe die Linien fa und fc, so sind diese Seiten eines in den Kreis beschriebenen Zwölfecks. Denn über jedes der 6 Dr., welche das Sechseck enthält, lassen sich 2 solcher Linien beschreiben, und da sie alle einander gleich werden müssen, so kann die Figur nichts anderes, als ein regelmäßiges Zwölfeck werden. Hier liegen die Seiten dem Kreise schon weit näher, als im Sechsecke.

Könnten wir nun die Größe der Seite fa finden, so brauchte man diese nur 12 mal zu nehmen, um den Umfang des Zwölfecks zu finden.

Der W. age ist aber ein r. W., weil der Halbmesser ef die Sehne ac in der Mitte schneidet; daher ist auch W. agf ein r. W., folglich das ❑ af = ❑ ga + ❑ fg.

Das ❑ von ga kennen wir, denn ac = ce, welches wir als Einheit annehmen wollen; daher ist ga = $\frac{1}{2}$, und ❑ ga = $\frac{1}{4}$. — fg kennen wir aber noch nicht.

fe ist eben so groß als ce, weil es ein Halbmesser ist, daher = 1; fg = fe — ge, folglich fg = 1 — ge; ge werden wir aber berechnen können.

Denn ❑ ae = ❑ ga + ❑ ge; nun ist ae = 1 und ga = $\frac{1}{2}$, das Quadrat von 1 ist 1, von $\frac{1}{2}$ ist es $\frac{1}{4}$, daher ist 1 = $\frac{1}{4}$ + ❑ ge, folglich ist ❑ ge = $\frac{3}{4}$, die Seite ge ist daher = der Wurzel aus $\frac{3}{4}$, oder gleich der Hälfte der Wurzel aus 3.

Zieht man nun $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ von 1 ab, so bleibt fg übrig. Multiplicirt man dies mit sich selbst, so hat man das ❑ fg. Hierzu addire man ❑ ga = $\frac{1}{4}$, so hat man ❑ fa. — Aus diesem muß man die Quadrat-Wurzel ziehen, so erhält man fa oder die Seite des Zwölfsecks. Man findet dafür sehr nahe die Zahl 0,517638, das heißt, wenn der Halbmesser in eine Million gleicher Theile getheilt wird, so hat die Seite des Zwölfecks davon etwas mehr als 517638. — Nimmt man diese Zahl 12 mal, so erhält man für den Umfang des Zwölfecks 6211656 Theile, wenn der Durchm. 2 Millionen hat, oder 3105828 Theile, wie der Durchm. 1 Million.

Verfährt man nun mit dem Zwölfeck, wie vorher mit dem Sechsecke, und theilt das Dr. aef wie vorher, so kann man dadurch die Seite des 24Ecks finden. Man erhält dafür etwas

mehr als 0,261052, das heißt, wenn der Halbmesser eine Million Theile hat, so hat die Seite des 24Ecks ihrer etwas über 261052. Multiplicirt man diese Zahl mit 24, so erhält man die Zahl 6265248, von welchem der Durchmesser 2 Millionen hat. Nimmt man ihn nur zu 1 Million, so hat der Umfang etwas über 3132624 Theile.

Auf ähnliche Weise sucht man die Seite des 48Ecks, und findet sie = 0,130806, also in Milliontheilen des Halbmessers gerechnet 130806. Diese Zahl 48 mal genommen, giebt den Umfang des 48Ecks zu 6278688 Milliontheilen des Halbmessers, oder zu 3139344 Milliontheilen des Durchmessers.

Man kann nun die Seite des 96Ecks suchen, und wird für sie die Zahl 0,065438 finden, oder 65438 Theile, wie der Halbmesser 1 Million hat. Nimmt man die Zahl 96 mal, so erhält man für den Umfang des 96Ecks 6282048 Milliontheile des Halbmessers, oder 3141024 des Durchmessers. Das 96Eck weicht nun schon nicht bedeutend vom Kreise ab, und man kann daher diesen Umfang für den des Kreises ansehen, wenn es nicht auf sehr große Genauigkeit ankommt. Man hat die Zahl noch durch andere Methoden weit genauer gesucht, die ersten fünf Ziffern verändern sich aber nicht mehr, und man kann sie daher immer für den wirklichen Umfang des Kreises nehmen, ohne die Zahl zu vergrößern, da der Fehler noch nicht den zehntausendsten Theil des Durchmessers beträgt. Häufig nimmt man sogar nur die ersten drei Ziffern, und sagt: Der Umkreis hat etwas mehr, als 314 Theile, wie der Durchmesser ihrer 100 hat, oder der Umkreis ist $3\frac{14}{100}$ des Durchmessers.

Ist noch weniger Genauigkeit nöthig, so kann man sagen: Der Umkreis hat 22 Theile wie der Durchmesser 7. — Denn nach dem vorher angegebenen Verhältniß ist der Durchmesser $\frac{100}{314}$ des Umkreises; setzen wir ihn nun $\frac{7}{22}$ desselben, und multipliciren im ersten Bruche Zähler und Nenner mit 7, im anderen aber mit 100, so erhalten wir $\frac{700}{2198}$ und $\frac{700}{2200}$; woraus man sieht, daß das letzte Verhältniß eine Theilung des Umkreises in 2200 Theile voraussetzt, von denen 700 auf den Durchmesser kommen, statt daß es nur 2198 seyn sollten. Man irrt sich dabei um einen kleinen Theil des Umfangs, was bei kleinen Kreisen nicht zu merken ist.

XLVIII. Stufe. Berechnung von Umfang und Durchmesser bei gegebenen Kreisen.

190ste Aufg. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 10 Fuß groß ist? —

Auflös. Wie sich überhaupt im Kreise der Durchmesser zum Umkreise verhält, so wird sich auch in einem Kreise, dessen Durchmesser 10 Fuß ist, der Umkreis verhalten. Wie sich daher 100 zu 314 verhalten, so verhalten sich 10 Fuß zum gesuchten Umfange, oder $100 : 314 = 10 : 31\frac{4}{10}$; der Umfang hat daher $31\frac{4}{10}$ Fuß.

Man hätte dies auch dadurch finden können, daß man geschlossen hätte: der Umfang ist immer $3\frac{14}{100}$ mal so groß als der Durchmesser. Ich muß daher 10 Fuß mit $3\frac{14}{100}$ multiplicieren. Dies giebt $30\frac{140}{100} = 31\frac{40}{100} = 31\frac{4}{10}$ Fuß.

191ste Aufg. Ein Pferd ist 153 mal in einem Kreise herumgeritten worden, welcher 50 Fuß im Durchmesser hat. Wie viel Fuß hat dasselbe gemacht?

Auflös. Ein Kreis, der 50 Fuß im Durchmesser hat, muß einen Umfang haben, der $3\frac{14}{100}$ mal so groß ist. $50 \times 3\frac{14}{100} = 157$, folglich ist des Kreises Umfang 157 Fuß groß. Da das Pferd diesen 153 mal durchlaufen hat, so ist es $157 \times 153 = 24021$ Fuß, oder etwas über eine Meile gelaufen.

192ste Aufg. Man steht auf einer Anhöhe oder einem Thurme, wo man nach allen Richtungen hin 4 Meilen weit sehen kann. Wie groß ist der Gesichtskreis, oder die Linie, wo der Himmel die Erde zu berühren scheint?

Auflös. Da man nach allen Seiten 4 Meilen weit sieht, so hat der Kreis, in dessen Mitte man steht, 8 Meilen Durchmesser. Wie sich nun verhält 100 zu 314, so verhalten sich 8 Meilen zu $25\frac{12}{10}$ Meilen, welches die Größe des Gesichtskreises ist.

193ste Aufg. Ein Baum, dessen Stamm kreisrund ist, hat nicht weit von der Erde 22 Fuß, wie groß ist sein Durchmesser?

Auflös. Der Umfang verhält sich zum Durchmesser wie 314 zu 100. Wie sich nun 314 verhalten zu 100, so verhalten sich 22 zu $7\frac{2}{314}$. Der Durchmesser ist daher sehr wenig über 7 Fuß.

Hätte man hier das Verhältniß 22 : 7 genommen, so würde man gerade 7 Fuß erhalten haben, wobei man den Durchmesser um $\frac{2}{314}$ Fuß zu klein erhalten hätte.

194ste Aufg. Ein kreisrunder Thurm hat $78\frac{1}{2}$ Fuß Umfang; man will dessen Durchmesser wissen?

Auflös. Wie sich 314 zu 100 verhalten, so werden sich auch diese $78\frac{1}{2}$ Fuß Umfang zu dem dazu gehörigen Durchmesser verhalten. Es findet sich aber $314 : 100 = 78\frac{1}{2} : 26$, welches daher der Durchmesser des Thurmes in Fußen ist.

195ste Aufg. Der Umfang der Erde, welcher kreisrund ist, beträgt 5400 Meilen. Man soll daraus den Durchmesser berechnen.

Auflös. Es verhalten sich $314 : 100 = 5400 : 1719\frac{234}{314}$. Daher ist der Durchmesser der Erde beinahe 1720 Meilen.

XLIX. Stufe. Flächeninhalt des Kreises.

Wenn man den Flächeninhalt des Kreises bestimmen will, so muß man ihn wie ein Vieleck betrachten. Jedes Vieleck kann in eben so viel Dreiecke zerlegt werden, als es Seiten hat. Berechnet man den Inhalt eines dieser Dreiecke und nimmt dasselbe so oft, als die Figur Seiten hat, so erhält man den Inhalt des ganzen Vielecks.

Wenn man z. B. den Inhalt des Sechsecks Fig. 111 berechnen sollte, so braucht man nur den Inhalt des Dreiecks aec zu suchen, indem man die Sechseckseite ac mit der halben Höhe ge multiplicirt. Da das Sechseck 6 solcher Dreiecke enthält, so braucht man dieses Dreieck nur 6 mal zu nehmen, um den ganzen Inhalt des Sechsecks zu haben.

Ich kann es aber auch so machen, daß ich die halbe Höhe ge mit dem ganzen Umfange des Sechsecks multiplicire; dann erhalte ich ganz dasselbe. Warum? —

Sollte ich den Inhalt des Zwölfecks suchen, so müßte ich die Seite fa Fig. 111 in 2 gl. Theile theilen, und vom Theilungspunkte nach e eine L. ziehen. Diese halbe Linie würde mit der Seite fa multiplicirt, und das Ganze 12 mal genommen; so hätte ich den Inhalt des Zwölfecks berechnet. Statt dessen brauchte ich auch nur die erwähnte halbe L., oder die Höhe des Dr. aef mit dem ganzen Umfange des Zwölfecks zu multipliciren.

Hieraus wird man sich nun sehr leicht den Satz entwickeln können, daß man den Inhalt eines jeden Vielecks

findet, wenn man die halbe Höhe eines seiner Dreiecke multiplicirt mit dem Umfange des ganzen Vielecks.

Der Kreis läßt sich aber betrachten als ein unendliches Vieleck. Es werden in ihm daher auch eine unendliche Menge von Dreiecken möglich seyn, die ihre Spitzen im Mittelpunkte haben. Man muß sich diese Dreiecke, wie ihrer im Sechsecke z. B. 6 sind, so vorstellen, als ob im Kreise der Winkel aec unendlich klein geworden wäre. Dann fallen die Seiten dieses Vielecks mit dem Umkreise zusammen, und die Höhe dieser Dreiecke, ge, ist so groß als der Halbmesser selbst; denn der Punkt g muß, wenn die Seite im Umkreise liegt, ebenfalls im Umkreise liegen, daher ge ein Halbmesser seyn. Man wird daher auch den Inhalt dieses Vielecks von unendlich vielen Seiten, nemlich des Kreises, dadurch finden können, daß man die halbe Höhe eines seiner Dr., d. h. des Halbmessers, multiplicirt mit seinem Umfange.

Da nun der halbe Halbmesser gleich ist dem vierten Theil des Durchmessers, so wird man den Inhalt des Kreises finden, wenn man den Umfang desselben mit dem vierten Theil seines Durchmessers multiplicirt

Wenn blos der Durchmesser des Kreises gegeben ist, so muß man erst den Umfang daraus berechnen. Da nun dieser = dem Durchmesser $\times \frac{314}{100}$, so wird man den Inhalt des Kreises aus dem Durchmesser erhalten, wenn man nimmt: den Durchmesser $\times \frac{314}{100} \times \frac{1}{4}$ Durchmesser. Wenn man aber den Durchmesser mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers multiplicirt, so erhält man $\frac{1}{4}$ Quadrat des Durchmessers, daher ist der Inhalt des Kreises = $\frac{1}{4}$ □ des Durchmessers $\times \frac{314}{100}$, oder auch = □ des Durchmessers $\times \frac{314}{400}$. — Man braucht daher nur das Quadrat des Durchmessers mit 314 zu multipliciren und durch 400 zu dividiren. Weil ferner $\frac{314}{400}$ eben so viel ist als $\frac{785}{1000}$, so braucht man auch nur das Qu. des Durchmessers mit 785 zu multipliciren und mit 1000 zu dividiren.

196ste Aufg. Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 10 Fuß ist?

Auflös. Das Qu. von 10 Fuß ist 100 Fuß. Dies wird mit 785 multiplicirt, giebt 78500, und mit 1000 dividirt giebt $78\frac{1}{2}$ □Fuß für den Inhalt. — Statt dessen hätte man auch

die 100 Fuß mit 314 multipliciren können, welches 31400 Fuß giebt, und mit 400 dividiren können. Man erhält dann auch $78\frac{1}{2}$ □Fuß.

197ste Aufg. Man steht auf einer Anhöhe, von der man nach allen Richtungen hin 4 Meilen weit sieht. Welches ist der Inhalt desjenigen Kreises in Quadratmeilen, welchen man übersieht?

Auflös. Der Durchmesser des Kreises ist 8 Meilen; sein Quadrat 64. — Dies multiplicirt mit 785 giebt 50240, und durch 1000 dividirt giebt $50\frac{24}{100}$ □Meilen.

198ste Aufg. Der wie vielte Theil ist ein Kreis von demjenigen Viereck, welches um ihn beschrieben worden ist? (Fig. 135, Taf. XI.)

Auflös. Die Seite des Qu. ist gleich dem Durchmesser des Kreises. Daher ist dieses Qu. zugleich das Qu. des Durchmessers. Da ich nun von diesem Quadrat 785 mal den tausendsten Theil nehmen muß, um den Inhalt des Kreises zu haben, so hat natürlich der Kreis 785 solche Theile als das Qu. 1000; oder der Kreis ist $\frac{785}{1000}$ vom Quadrate des Durchmessers.

199ste Aufg. Wie verhalten sich zwei Kreise ihrem Inhalte nach zu einander?

Auflös. Da jeder $\frac{785}{1000}$ vom Quadrate seines Durchmessers ist, so müssen sich die Kreise selbst verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Ein Kreis, dessen Durchmesser zweimal so groß ist als der Durchmesser eines andern, wird daher viermal so viel Flächeninhalt haben. Wäre der Durchmesser 3 mal so groß, so würde der Flächeninhalt 9 mal größer seyn u. s. w.

Hieraus ergiebt sich auch, daß in einem rwkl. Dr. derjenige Kreis, welcher die Hypothenuse zu seinem Durchmesser hat, eben so groß ist, als die beiden Kreise zusammen genommen, welche die Catheten zu ihren Durchmessern haben. Denkt man sich z. B. in Fig. 108, Taf. XVII in jedem Quadrate einen berührenden Kreis, so ist jeder $\frac{785}{1000}$ von seinem Quadrate, daher der größte Kreis eben so gut gleich den beiden anderen seyn muß, wie das größte Qu. gleich den beiden anderen ist.

Nachtrag,

enthaltend die wichtigsten Begriffe, Lehrsätze und Aufgaben aus der Stereometrie oder Körperlehre und deren Anwendung im praktischen Leben, für Zimmerleute, Maurer, Steinmetzen und alle diejenigen, welche einzelne Körper zu berechnen haben.

Stereometrie.

Die Stereometrie lehrt uns sowohl den Inhalt als auch die Oberfläche eines jeden Körpers finden, wenn uns gewisse Stücke bekannt sind, die leicht durch Hülfe des Maaßstockes ausgemessen werden können.

Denken wir uns die Ebene abcd Fig. 116, Taf. XVIII von ihrem jetzigen Stande bis zu efgh bewegt, so hat sie einen gewissen Raum durchlaufen; dieser durch die Bewegung der Ebene verdrängte Raum heißt der Inhalt eines Körpers.

Ein Körper ist demnach nach drei Richtungen hin ausgedehnt, nach Länge, Breite und Höhe. Die Ausdehnung in die Länge giebt uns die Linie, und eine Ausdehnung in die Länge und Breite giebt die Fläche.

An jedem Körper, der nicht eine runde Oberfläche hat, finden wir Ecken, Kanten und Seitenflächen.

(Um dies und das Folgende, so wie überhaupt die Lehrsätze der Stereometrie, den Kindern anschaulich zu machen, muß der Lehrer eine Anzahl von Modellen vorräthig haben, die er sich leicht von Thon, Pappe oder Holz selbst anfertigen kann.)

Die Körper sind entweder reguläre (regelmäßige) oder irreguläre (unregelmäßige).

Dieser Pflasterstein ist ein unregelmäßiger und dieser Würfel ein regelmäßiger Körper.

Zwar hat es die Stereometrie zunächst mit den regelmäßi-

gen Körpern zu thun, doch kann man auch unregelmäßige Körper, besonders wenn sie nicht zu groß sind, ihrem Inhalte nach auf folgende Weise bestimmen:

Wenn man einen Körper, der kein Wasser einsaugt, z. B. einen Stein, in ein Gefäß mit Wasser angefüllt eintaucht, so wird er so viel Wasser aus der Stelle treiben als er Inhalt hat; war das Gefäß voll, so muß so viel Wasser überlaufen, war es aber nicht voll, so muß das Wasser steigen, und zwar immer um so viel als der eingetauchte Körper selbst Inhalt hat. Wenn nun an der Seite eines solchen Gefäßes ein Maaßstab ist, das Gefäß überall gleiche Weite hat und die Größe der Wasserfläche in demselben bekannt ist, so sehe man nach, um wie viel das Wasser durch das Eintauchen des Körpers stieg, multiplicire dieses Maaß mit der Grundfläche, so wird das Produkt den körperlichen Inhalt des zu messenden Körpers angeben.

In der Natur kommen folgende fünf Arten regelmäßiger Körper vor:

1) Das regelmäßige Tetraedrum ist umschlossen von vier einander gleichen und gleichseitigen Dreiecken, hat vier Ecken und sechs Kanten.
2) Das Hexaedrum, Cubus, Würfel ist umschlossen von sechs gleichen Quadraten als Seitenflächen, hat acht Ecken und zwölf Kanten; an ihm sind immer je zwei und zwei Seiten unter einem rechten Winkel gegen einander gestellt.
3) Das regelmäßige Octaedron ist umschlossen von acht einander gleichen und gleichseitigen Dreiecken, hat sechs Ecken und zwölf Kanten.
4) Das regelmäßige Dodekaedrum ist umschlossen von zwölf Seiten, die entweder zwölf gleichschenkliche dreiseitige, oder zwölf unter sich gleiche und ähnliche rhombische, oder zwölf gleiche fünfseitige Seitenflächen sind. Die Ecken und Kanten sind in ihrer Zahl nach diesen dreierlei Bestimmungen verschieden.
5) Das Ikosaedrum ist umschlossen von zwanzig Seitenflächen.

Diejenigen Körper, welche vorzüglich in der Stereometrie abgehandelt werden und eine gewisse Regelmäßigkeit an sich tragen, sind: das Prisma, der Zylinder, die Pyramide, der Kegel und die Kugel. Da aber an diesen Körpern sowohl die Oberfläche, als auch der körperliche Inhalt nach gewissen Gesetzen gesucht werden müssen, so wollen wir hier, ehe die vorzüglichsten Lehrsätze und Aufgaben der Stereometrie folgen, vor allen Dingen die Hülfsmittel angeben, auf welche Weise diese Berechnung der Flächen und des Inhalts eines Körpers auf die leichteste Weise geführt werden kann.

Von der Flächenrechnung.

Die Größe einer Fläche wird angegeben in Quadratruthen, Quadratfußen und Quadratzollen.

Eine Quadratruthe (□°) ist eine Fläche, welche eine Ruthe oder 12 Fuß lang und eben so breit ist.

Ein Quadratfuß (□') ist einen Fuß lang und eben so breit.

Ein Quadratzoll (□") ist einen Zoll lang und einen Zoll breit.

In Deutschland ist das sogenannte Duodecimalmaaß gebräuchlich, nach welchem

eine Längenruthe in 12 Fuß,
ein Längenfuß in 12 Zoll,
ein Längenzoll in 12 Linien getheilt wird; demnach wird
eine □° 12 mal 12 oder 144 □'
ein □' 12 mal 12 oder 144 □"
ein □" 12 mal 12 oder 144 □"' haben.

Aus diesem erhellt, daß

Längenruthen mit Längenruthen multiplicirt Quadratruthen geben.

Z. B. Ist ein Garten 5° lang und 3° breit, so beträgt sein Flächenraum 15 □°.

Denken wir uns Fig. 112 (Taf. XVIII) als eine Quadratruthe, deren Länge und Breite jede in 12 Fuß getheilt ist, und nehmen daraus eines der langgestreckten Rechtecke, deren 12 über einander stehen, von denen jedes eine Ruthe lang und einen Fuß breit ist, so heißt ein solches Rechteck eine Rie-

menruthe (r⁰), welche mithin der zwölfte Theil einer □⁰ ist, aus welchem Grunde

Längenruthen mit Fußen multiplicirt Riemenruthen geben.

Da eine solche Riemenruthe eine Ruthe oder 12' lang und einen Fuß breit ist, so muß sie 12 □' enthalten, mithin ist 1 □' der zwölfte Theil einer r⁰, und es müssen darum Flächen, jede einen □' groß, entstehen, wenn man den zwölften Theil einer Ruthe mit Fußen, oder auch den zwölften Theil eines Fußes mit Ruthen multiplicirt; der 12te Theil eines Fußes ist 1", folglich müssen

Längenruthen mit Zollen multiplicirt Quadratfuße geben.

Multiplicirt man ferner Längenruthen mit dem zwölften Theile eines Zolles oder mit Linien, so muß auch das Produkt den zwölften Theil eines □' betragen; der zwölfte Theil eines Quadratfußes aber ist eine Fläche, die einen Fuß lang und einen Zoll breit ist, und ein Riemenfuß (r') genannt wird, mithin müssen

Längenruthen mit Linien multiplicirt Riemenfuße geben.

Anmerkung. Was hier an der Längenruthe entwickelt wurde, läßt sich eben so an dem Längenfuße, Längenzolle und der Linie entwickeln, wenn der Lehrer sich Fig. 112 als □', als □", als □"' denkt, und als Resultat dieser Entwicklung wird sich ergeben:

Ruthen	mit	Ruthen	geben	Quadratruthen, □⁰
=	=	Fußen	=	Riemenruthen, r⁰
=	=	Zollen	=	Quadratfuße, □'
=	=	Linien	=	Riemenfuße, r'
Fuße	=	Fußen	=	Quadratfuße, □'
=	=	Zollen	=	Riemenfuße, r'
=	=	Linien	=	Quadratzolle, □"
Zolle	=	Zollen	=	Quadratzolle, □"
=	=	Linien	=	Riemenzolle, r"
Linien	=	Linien	=	Quadratlinien, □"'

Wir wollen uns dies in folgender Tafel näher zusammenstellen:

	Ruthen	Fuße	Zolle	Linien
Ruthen	□°	r°	□'	r'
Fuße	r°	□'	r'	□"
Zolle	□'	r'	□"	r"
Linien	r'	□"	r"	□"'

1ste Aufgabe. Ein Garten sey 6° 8' 3" lang und 3° breit, wie viel hat er Flächenraum?

Auflös. 6° 8' 3"
3°

18□° 24r° 9□'. Da nun 24r° 2□° betragen, so ist sein Flächenraum = 20□° 9□'.

2te Aufg. Ein Stück Feld sey 4° 3' 5" lang und 2° 4' 3" breit, wie groß ist der Flächenraum?

Auflös. 4° 3' 5"
2° 4' 3"

8□° 6r° 10□'
16r° 12□' 20r'
12□' 9r' 15□"

8□° 22r° 34□' 29r' 15□"

oder 10□° 1r° —□' 6r' 3□"

Da man nun im gemeinen Leben nur nach □°, □', □" rechnet, so würde das Produkt angegeben werden müssen:

10□° 12□' 75□"

Anmerk. Mehrere ähnliche Aufgaben stelle der Lehrer selbst, lasse aber jede einzelne an der großen Tafel von einem der Schüler mit Angabe der Gründe entwickeln, damit das Rechnen nicht mechanisch werde, und fahre damit fort, bis die Schüler eine gewisse Fertigkeit erlangen. Diese Art der Flächenberechnung ist dem Gewerbtreibenden Zeit und Ziffern ersparend, weil er dadurch großen Multiplicationen und nachherigen Divisionen ausweicht. Sollten Brüche in den Factoren vorkommen, so stelle der Lehrer anfänglich die Produkte

der Brüche einzeln, damit dem Schüler die Ueberſicht leichter werde. Z. B.

	6^0	8′	$9\frac{1}{8}$″		
	8^0	10′	$7\frac{1}{6}$″		
	$48\square^0$	64^{r0}	$72\square'$		
		60^{r0}	$80\square'$	$90^{r'}$	
			$42\square'$	$56^{r'}$	$63\square''$
$\frac{1}{6}$″ × 6^0 =				$1\square'$	— —
$\frac{1}{6}$″ × 8′ =				—	$1^{r'}$ $4\square''$
$\frac{1}{6}$″ × 9″ =				—	— $1\frac{1}{2}\square''$
$\frac{1}{6}$″ × $\frac{1}{8}$″ =				—	— $-\frac{1}{48}\square''$
8^0 × $\frac{1}{8}$″ =				$1\square'$	— —
10′ × $\frac{1}{8}$″ =				—	$1^{r'}$ $3\square''$
7″ × $\frac{1}{8}$″ =				—	— $-\frac{7}{8}\square''$
	$48\square^0$	124^{r0}	$196\square'$	$148^{r'}$	$72\frac{19}{48}\square''$
oder	$59\square^0$	9^{r0}	$4\square'$	$10^{r'}$	$-\frac{19}{48}\square''$
oder	$59\square^0$	—	$112\square'$	—	$120\frac{19}{48}\square''$

Von der Körperrechnung.

Der Inhalt eines Körpers wird angegeben in Cubikruthen, Schachtruthen, Cubikfuß und Cubikzoll.

Eine Cubikruthe (c^0) iſt ein körperlicher Raum, der eine $\square^0$ zur Grundfläche und eine Ruthe Höhe hat. (Taf. XIX, Figur 113.)

Eine Schachtruthe (s^0) hat eine $\square^0$ zur Grundfläche und einen Fuß Höhe.

Ein Cubikfuß (c') hat einen $\square'$ zur Grundfläche und 1′ Höhe.

Ein Cubikzoll (c'') hat einen $\square''$ zur Grundfläche und 1″ Höhe.

Eine Cubikruthe iſt, wie Fig. 113 zeigt, ein Würfel von 12′ Länge, 12′ Breite und 12′ Höhe, oder 1^0 Länge, 1^0 Breite und 1^0 Höhe, der $1728^{c'}$ enthält. Da nun jede der ſechs äußern Flächen einer c^0 eine $\square^0$ groß iſt, ſo kann man ſagen:

Quadratruthen mit Längenruthen multiplicirt geben Cubikruthen.

Theilt man nun die c^0 (Fig. 113) durch die Linien ag, op, qr, st u. ſ. w. in zwölf gleiche Tafeln, wie abzgfec

eine derselben darstellt, so ist jede derselben eine Schachtruthe von einer □° Grundfläche und einem Fuß Höhe, die demnach den 12ten Theil einer c° oder 144c' enthält; hieraus folgt, daß

Quadratruthen mit Fußen multiplicirt Schachtruthen geben.

Theilt man eine Schachtruthe in zwölf gleiche Theile, so entstehen zwölf einzelne Körper, wie in Fig. 113 mzngdef, von denen jeder eine Riemenruthe zur Grundfläche und einen Fuß Höhe, oder was dasselbe Verhältniß giebt, jeder einzelne einen □' Grundfläche und 1° Höhe hat.

Nun ist es aber gleichgültig, auf welche Weise die Schachtruthe in 12 gleiche Theile getheilt wird, oder auf welche Weise der zwölfte Theil des Productes, Schachtruthe genannt, erhalten wird. Das ganze Product entstand, wenn man □° mit Fußen multiplicirte, der zwölfte Theil des Productes wird also entstehen, wenn man die □° mit dem zwölften Theile eines Fußes, also mit Zollen multiplicirt, woraus folgt:

Quadratruthen mit Zollen oder
Riemenruthen mit Fußen
multiplicirt geben Balkenruthen. (Dies läßt sich leicht an Brettchen deutlich machen.)

Theilt man eine Balkenruthe in zwölf gleiche Theile, so entstehen zwölf einzelne Körper, von denen jeder 1' lang, 1' breit und 1' hoch ist, oder von denen jeder 1 □' Grundfläche und 1' Höhe hat, wie in Fig. 113 nmzglkh. Es ist demnach der 12te Theil einer Balkenruthe ein Cubikfuß.

Dieser 12te Theil des vorigen Produktes oder einer Balkenruthe kann auch auf verschiedene Weise erhalten werden, und es müssen immer

Quadratruthen mit Linien oder
Riemenruthen mit Zollen
multiplicirt Cubikfuße geben.

Das, was hier von Fig. 113 gesagt wurde, indem man dieselbe als eine Cubikruthe betrachtete, wird der Lehrer leicht anwenden können auf Cubikfuße und Cubikzolle, wenn er sich die Fig. 113 als c' oder c'' denkt, da

ein Schachtfuß der zwölfte Theil eines c'
ein Balkenfuß = = = = s'
ein Cubikzoll = = = = b'
ein Schachtzoll = = = = c''
ein Balkenzoll = = = = s''
eine Cubiklinie = = = = b'' ist.

Aus dieser Entwickelung werden sich folgende Resultate ergeben:

Quadratruthen mit Ruthen multiplicirt geben c°
= = Fußen = = s°
= = Zollen = = b°
= = Linien = = c'
Riemenruthen = Ruthen = = s°
= = Fußen = = b°
= = Zollen = = c'
= = Linien = = s'
Quadratfuße = Ruthen = = b°
= = Fußen = = c'
= = Zollen = = s'
= = Linien = = b'
Riemenfuße = Ruthen = = c'
= = Fußen = = s'
= = Zollen = = b'
= = Linien = = c''
Quadratzolle = Ruthen = = s'
= = Fußen = = b'
= = Zollen = = c''
= = Linien = = s''.

Zur Erleichterung der Ueberſicht diene folgende Tabelle:

	□°	r°	□'	r'	□''	r''	□'''
Ruthen	c°	s°	b°	c'	s'	b'	c''
Fuße	s°	b°	c'	s'	b'	c''	s''
Zolle	b°	c'	s'	b'	c''	s''	b''
Linien	c'	s'	b'	c''	s''	b''	c'''

Aufgabe. Eine Wand sey 2° 3′ 4″ lang, 3° 5′ 5″ hoch und 2′ 4″ 3‴ dick, wie viel beträgt ihr körperlicher Inhalt?

Auflös. 2° 3′ 4″ Länge,
3° 5′ 5″ Höhe,

6□° 9ro 12□′
10ro 15□′ 20r′
10□′ 15r′ 20□″

6□° 19ro 37□′ 35r′ 20□″, oder
7□° 10ro 4□′ —r′ 8□″ Flächenraum
2′ 4″ 3‴ Dicke

14so 20bo 8c′ —s′ 16b′
28bo 40c′ 16s′ —b′ 32c″
21c′ 30s′ 12b′ —c″ 24s″

14so 48bo 69c′ 46s′ 28b′ 32c″ 24s″

1co 6so 6bo 1c′ —s′ 6b′ 10c″ —s″.

Da nun im gemeinen Leben nur nach c° s° c″ gemessen und bestimmt wird, so würde das Produkt $1^{co}\ 6^{so}\ 73\frac{1}{4}^{c'}$ betragen.

Anmerkung. Aehnliche Aufgaben kann jeder Lehrer aus dem Kreise seiner Schüler und der nächsten Verhältnisse nehmen. Z. B. der körperliche Inhalt einer Stube, der Inhalt eines ausgegrabenen Canals u. s. w.

Das Prisma.

Ein Prisma ist ein Körper, der von zwei gleichen und gleichlaufenden Seiten als Grundflächen, und von so vielen Parallelogrammen, als jede Grundfläche Seitenlinien hat, eingeschlossen wird.

Nach der Zahl dieser Seitenflächen heißt ein Prisma ein 3=, 4=, 5=, 6seitiges.

Stehen die langen Seitenkanten und die Seitenflächen, wie in Fig. 114. (Taf. XVIII) cf, be, ad senkrecht auf der Grundfläche, so heißt das Prisma ein senkrechtes; ist dies nicht der Fall, wie in Fig. 115, so ist es ein schiefes Prisma.

Die beiden gleichlaufenden Grundflächen sind hier abc und def, und die Seitenflächen in beiden Figuren sind acdf, abde, bcfe; in Fig. 114 sind diese Parallelogramme Rechtecke oder Oblonge, in Fig. 115 aber sind sie verschobene Rechtecke oder Rhom=

boide und Oblonge. (Der Lehrer lasse dies an einem schiefen Prisma suchen.)

Eine senkrechte Linie oder ein Perpendikel von der Grundfläche nach der gegenüberstehenden Parallelfläche gezogen giebt die Höhe des Prisma an, und darum geben beim senkrechten Prisma Fig. 114 die Seitenkanten ad, be, cf die Höhe an. Bei Fig. 115 würde die senkrechte L. do die Höhe angeben.

Ein Prisma, dessen gleiche und gleichlaufende Grundflächen Quadrate oder Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepipedum, wie Fig. 116.

Ein senkrechtes Prisma, dessen sämmtliche Seiten- und Grundflächen Quadrate sind, heißt ein Würfel oder Cubus.

Aufgabe. Den Quadratinhalt der Oberfläche eines Prisma zu finden.

Auflösung. Da die Grundflächen gleiche und gll. Ebenen, die Seitenflächen aber Parallelogramme sind, so suche man den Inhalt der beiden Grundflächen und den der Seitenflächen, addire alle Produkte, so erhält man die Oberfläche des Prisma.

Aufgabe. Eine gerade vierseitige Säule, die ein Parallelepipedum ist und 3′ 4″ 3‴ Dicke, 4′ 2″ 1‴ Breite und 1° 8′ 4″ 6‴ Höhe hat, soll mit Gyps verputzt werden, wie viel □°, □′, □″ kann der Maurer sich bezahlen lassen?

Auflös. Da die Säule mit ihrer untern Grundfläche aufsteht und also nur zu verputzen sind:

1) die obere Grundfläche von 3′ 4″ 3‴ mal 4′ 2″ 1‴,
2) zwei Parallelogramme, jedes von 3′ 4″ 3‴ Breite und 1° 8′ 4″ 6‴ Länge,
3) zwei Parallelogramme, jedes von 4′ 2″ 1‴ Breite und 1° 8′ 4″ 6‴ Länge,

so würde die Rechnung folgende seyn:

3′	4″	3‴
4′	2″	1‴
12□′	16r′	12□″
	6	8 6r″
	3	4 3□‴
12□′	22r′	23□″ 10r″ 3□‴ oder
13□′	11r′	11□″ 10r″ 3□‴ Inhalt der obern Grund-

fläche. Ferner:

1° 8′ 4″ 6‴
3′ 4″ 3‴

3r° 24□′ 12r′ 18□‴
4 32 16 24r‴
3 24 12 18□″

3r° 28□′ 47r′ 58□″ 36r″ 18□″ oder
5r° 8□′ 4r′ 1□″ 1r″ 6□″ Inhalt einer Seitenfläche; da deren nun zwei vorhanden sind, so ist ihr Inhalt 2 mal so groß, oder
11r° 4□′ 8r′ 2□′ 3r″. Ferner:

1° 8′ 4″ 6‴
4′ 2″ 1‴

4r° 32□′ 16r′ 24□″
2 16 8 12r″
1 8 4 6□‴

4r° 34□′ 33r′ 40□″ 16r″ 6□‴ oder
7r° 1□′ —r′ 5□″ 4r″ 6□‴ Inhalt einer andern Seitenfläche, deren auch zwei vorhanden sind, und mithin einen Inhalt von 14r° 2□′ —r′ 10□″ 9r″ haben. Addiren wir das Gefundene:

13□′ 11r′ 11□″ 10r″ 3□‴ Grundfläche,
11r° 4 8 2 3 — zwei Seitenflächen,
14r° 2 — 10 9 — die beiden andern Seitenflächen,

25r° 19□′ 19r′ 23□″ 22r″ 3□‴ oder
2□° 2r° 8□′ 9r′ —□″ 10r″ 3□‴ Inhalt der ganzen Oberfläche des Prisma. Der Maurer kann sich mithin 2 □°, 32 beinahe 33 □′, bezahlen lassen. (Das schiefe Prisma wird eben so berechnet.)

Aufg. Den körperlichen Inhalt eines Prisma zu finden.

Auflös. Dies geht schon aus dem oben bei der Körperrechnung Gesagten hervor; man multiplicirt die Grundfläche mit der Höhe des Prisma, so giebt das Produkt den körperlichen Inhalt desselben.

Aufg. Eine Rechteckſäule sey 5′ 3″ breit, 4′ 6″ dick und 1° 9′ 5″ hoch, wie viel hat sie körperlichen Inhalt?

Auflöſ. 5′ 3″ Breite,
4′ 6″ Dicke,

20□′ 12r′
30r′ 18□″

20□′ 42r′ 18□″ oder
1r0 11□′ 7r′ 6□″ Grundfläche der Säule,
1° 9′ 5″ Höhe,

1s0 11b0 7c 6s′
9b0 99 63 54b′
5 55 35 30c″

1s0 20b0 111c′ 124s′ 89b′ 30c″ oder
3s0 6b0 1c′ 11s′ 7b′ 6c″, mithin beinahe 3s0 74c′ körperlichen Inhalt der Viereckſäule.

Lehrſatz. Zwei rechtwinkliche oder ſenkrechte Prismen, deren Höhen einander gleich ſind, verhalten ſich ihrem Inhalte nach wie ihre Grundflächen. (Fig. 117, Taf. XVIII.)

Auflöſ. Die Rechtecke aqkg, becd ſind die Grundflächen des großen Prisma und ab iſt ſeine Höhe, die Rechtecke fthg, mnoe ſind die Grundflächen des kleinen Prisma und fm ſeine Höhe. Da ab und fm gleichlaufend ſind zwiſchen gll. Linien, ſo ſind ſie einander gleich, mithin haben beide Prisma gleiche Höhe. Die Seite ag iſt hier in 2 gleiche Theile getheilt, und alle Seiten der Grundfläche am kleinen Prisma gehen mit den ähnlich liegenden Seiten des großen gleichlaufend, woraus folgt, daß die Grundfläche fthg viermal in der Grundfläche aqkg enthalten iſt, mithin können auf der letztern vier Prisma neben einander ſtehen, von denen jedes die Grundfläche fthg hat, oder was daſſelbe iſt, vier kleine Prisma wie fthgmnoe füllen erſt den Raum des großen Prisma aqkgbcde aus, folglich iſt jedes ſolcher kleinen Prisma der vierte Theil des größern, wie die Grundfläche des kleinern der vierte Theil der größern war. Folglich verhalten ſich dieſe Prismen ihrem Inhalte nach wie die Grundflächen. Dies läßt ſich auf folgende Weiſe darſtellen:

A ſey das große Prisma, I ſein Inhalt, G ſeine Grundfläche und H ſeine Höhe;

B ſey das kleine Prisma, i ſein Inhalt, g ſeine Grundfläche

und h seine Höhe, so verhält sich nach dem Obigen der Inhalt des großen Prisma zum Inhalte des kleinen Prisma, wie G mal H zu g mal h; da nun H = h, so verhält sich G mal H zu g mal h wie G zu g, folglich verhält sich I zu i wie G zu g.

Lehrsatz. Zwei Rechtecksäulen, deren Grundflächen einander gleich sind, verhalten sich wie ihre Höhen. (Fig. 118, Taf. XVIII.)

Den Beweis werden Lehrer und Schüler leicht selbst ausführen können. I : i = ab : ac. Ueberhaupt verhalten sich die Inhalte der Rechtecksäulen von verschiedenen Grundflächen und verschiedenen Höhen wie die Produkte aus den Grundflächen und Höhen, welches sich aus dem Vorigen ergiebt; also

I zu i wie G mal H zu g mal h.

Anmerkung. Sollte der Lehrer vielleicht hier noch für nothwendig erachten, seinen Schülern über den Würfel und die sogenannten Cubikwurzeln etwas zu sagen, so findet er die Anweisung dazu in meinem Rechenbuche Th. II.

Dasselbe, was hier vorzüglich von vierseitigen Prismen, die am häufigsten im praktischen Leben vorkommen, gesagt wurde, gilt auch für das 5-, 6-, 7seitige; wenn ein solches mit einem vierseitigen gleiche Grundfläche und Höhe hat, so haben sie immer auch gleichen körperlichen Inhalt. Ist z. B. die Grundfläche vom 6seitigen Prisma 12 □′ und seine Höhe 10′, die Grundfläche des vierseitigen sey auch 12 □′ und seine Höhe 10′, so ist der Inhalt jedes einzelnen 120^{c}′.

Der Zylinder.

Denkt man sich ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, so heißt dies eine Walze oder ein Zylinder. Fig. 119, Taf. XVIII.

Die Linie ab, welche die Mittelpunkte beider Grundflächen mit einander verbindet, heißt die Axe des Zylinders, wie jede Linie cd, in welcher eine durch die Axe des Zylinders gelegte Ebene die krumme Oberfläche desselben schneidet, eine Seitenlinie des Zylinders genannt wird.

Stehen alle Seitenlinien senkrecht auf der Grundfläche, so

heißt der Zylinder ein senkrechter oder gerader, und ist dies nicht der Fall, so heißt er ein schiefer.

Alle Seitenlinien, sowohl des geraden als des schiefen Zylinders, sind gerade Linien, so wie überhaupt jeder Zylinder durchgehends von gleicher Dicke ist. Daher kommt es, daß jeder Durchschnitt des senkrechten Zylinders, der gll. mit der Grundfläche geht, ein Kreis und an Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalte der Grundfläche ist.

Aufg. Der körperliche Inhalt eines geraden Zylinders ist so groß wie das Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe, oder g mal h.

Auflös. Da der Cylinder ein Körper ist wie ein Prisma, hinsichtlich seiner durchgehends gleichen Dicke, und man bei diesem durch Multiplication der Grundfläche und Höhe den körperlichen Inhalt findet, so muß dies ebenfalls beim Zylinder Statt finden. Da man ferner beim Cylinder nicht die Grundfläche, sondern nur seinen Durchmesser und seine Höhe angiebt, so muß die Grundfläche desselben, die immer ein Kreis ist, erst aus dem Durchmesser gefunden werden; den Flächeninhalt eines Kreises aben findet man, wie schon in der Kreislehre gesagt wurde, wenn man den vierten Theil des Quadrats vom Durchmesser mit 3,14 multiplicirt. Da die Zahl 3,14 immerwährend bei der Berechnung der Kreisflächen ein stehender Factor ist, so hat man sie in den mathematischen Lehrbüchern, der Kürze des Ausdrucks wegen, mit dem griechischen Buchstaben π (pi) bezeichnet, und es würde demnach der körperliche Inhalt eines geraden Zylinders gleich seyn dem Produkte: der vierte Theil vom Quadrate des Durchmessers mal 3,14 mal der Höhe des Zylinders, $= \frac{d^2}{4} . \pi . h$; da nun aber der vierte Theil vom Quadrate des Durchmessers gleich ist dem Quadrate des Halbmessers, so könnte man die obige Formel auch so ausdrücken: $r^2 . \pi . h$.

Beispiel. Der Durchmesser eines Zylinders sey 20′ und seine Höhe 9′, man soll daraus den körperlichen Inhalt finden.

Wenn der Durchmesser (d) = 20′, so ist der Halbmesser

r = 10′, folglich

r^2 = 10 mal 10′ = 100 □′; multiplicirt man diese

mit π = 3,14, so ist
$r^2 . \pi$ = 314,00 □′; multipl. man die mit
der Höhe h = 9′ so ist
$r^2 . \pi . h$ = 2826,00^{c}′ = dem Inhalte des Zylinders.

Hierauf beruhen auch die Sätze, daß:

1) Gerade Zylinder von gleichen Grundflächen ihrem Inhalte nach sich verhalten wie ihre Höhen.
2) Gerade Zylinder von gleichen Höhen sich ihrem Inhalte nach verhalten wie ihre Grundflächen, und
3) Gerade Zylinder von ungleichen Höhen und Grundflächen sich ihrem Inhalte nach verhalten wie die Produkte aus den Grundflächen und Höhen.

(Der Lehrer wird hierzu die nöthigen Aufgaben und Beispiele leicht selbst geben können.)

Aehnliche Zylinder sind solche, deren Achsen gegen die Grundfläche einerlei Neigung haben, und deren Höhen sich wie die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen verhalten.

Lehrsatz. Aehnliche Zylinder verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Würfel oder Kuben ihrer Halb- oder Durchmesser.

Auflös. Der größere Zylinder sey A, sein Halbmesser sey R, seine Höhe sey H; der kleinere ähnliche Zylinder sey a, sein Halbmesser r und seine Höhe h: so ist nach Obigem der Inhalt des größern Zylinders = $R^2 \times \pi \times H$, und der des kleinern = $r^2 \times \pi \times h$, mithin verhält sich

$$A : a = R^2 \pi H : r^2 \pi h.$$

Da nun der Factor π (3,14) in beiden Proportionaltheilen enthalten ist, so bleiben dieselben in demselben Verhältnisse, wenn man π aus beiden Theilen wegläßt, mithin verhält sich

$$A : a = R^2 H : r^2 h$$
$$H : h = R : r$$
$$\overline{AH : ah = R^2 HR : r^2 hr.}$$

Bleiben hier nun die Factoren H und h aus allen Gliedern der Proportion weg, so bleiben sie wieder in demselben Verhältnisse zu einander, und es ist

$$A : a = R^2 R : r^2 r$$

$R^2 R$ oder R^3 = dem Würfel auf R errichtet, und
$r^2 r$ oder r^3 = = = r =

mithin verhält sich $A : a = R^3 : r^3$, welcher Ausdruck eben heißt: die Inhalte ähnlicher Zylinder verhalten sich wie die Würfel ihrer Halbmesser.

Anmerk. Die Ausdrücke $r^2 \times \pi \times h$, $r^2 . \pi . h$ und $r^2\ \pi\ h$ bezeichnen ein und dasselbe, nemlich die Multiplication der drei Größen.

(Will der Lehrer dies auf die Durchmesser zurückführen, so muß er entweder den Schülern sagen, daß die Halbmesser zweier Kreise in demselben Verhältnisse zu einander stehen wie die Durchmesser, oder er gehe gleich von der Proportion aus:

$$A : a = \frac{D^2}{4} \times \pi \times H : \frac{d^2}{4} \times \pi \times h.)$$

Aufg. Den Flächeninhalt der krummen Oberfläche oder den Mantel eines senkrechten Zylinders zu finden.

Auflös. Man multiplicire die Peripherie der Grundfläche mit der Seitenlinie oder Höhe des Zylinders, so gibt das Produkt den Inhalt der Seitenfläche oder des Mantels des Zylinders; denn wird die Seitenfläche des Zylinders abgewickelt, so entsteht ein Rechteck, wie in Fig. 120, Taf. XVIII dxbc, das zur Grundlinie die Peripherie des Zylinders und zur Höhe die Höhe des Zylinders hat. Die Peripherie der Grundfläche oder dc findet man aber, wenn man den Durchmesser des Zylinders mit 3,14 multiplicirt, oder was dasselbe sagt: die Peripherie der Grundfläche des Zylinders $= d\pi$; mithin findet man immer den Inhalt des Mantels eines Zylinders = dem Produkte aus $d\pi h$.

Beim schiefen Zylinder läßt sich diese Regel nicht anwenden, so wie überhaupt weder der Inhalt noch der Mantel eines solchen sich nicht aus den bis hieher dagewesenen Grund- und Lehrsätzen entwickeln läßt; diese Entwickelung gehört einer höhern Stufe der Mathematik an, weil die Grundflächen des schiefen Zylinders keine Kreise mehr sind.

Anmerk. Sollte man den Inhalt oder den Mantel eines geraden Zylinders, der aber schief abgeschnitten ist, zu berechnen haben, wie hier Taf. XIX, Fig. 123, so möchte dies wohl am leichtesten geschehen können, indem man die längere Seitenlinie bd mit der kürzern ac = fd addirt, den Inhalt

oder Mantel des ganzen Zylinders von der bf sucht und das gefundene Produkt durch 2 dividirt, oder, in der Formel ausgedrückt, wenn ab = d ist:

für den Mantel $\frac{ab \times 3{,}14 \times bf}{2} = \frac{d \pi h}{2}$, und

für den Inhalt $\frac{\frac{1}{4} ab^2 \times 3{,}14 \times bf}{2} = \frac{r^2 \pi h}{2}$

Die ganze Oberfläche eines geraden Zylinders, d. h. die krumme Oberfläche und seine beiden Grundflächen, sind nach obigen Grundsätzen leicht zu finden.

Lehrsatz. Jeder Zylindermantel ist so groß wie ein Kreis, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Grundfläche und der Höhe des Zylinders ist.

Auflös. Man zeichne, in Figur 120, Taf. XVIII, das Rechteck xbcd, das F heißen soll, und dessen eine Seite bc gleich sey der Höhe des Zylinders, welche mit L bezeichnet werden soll; die andere Seite cd sey gleich der Peripherie der Grundfläche des Zylinders, welche mit dem Halbmesser gh = r beschrieben wurde. Nun sey C der zu suchende Kreis und R sein Halbmesser, welcher die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Durchmesser des Zylinders seyn soll, so daß also

L : R = R : 2r,

so ist also zu zeigen, daß F = C sey. Man mache be = bc und trage gh auf cb von c aus, so daß ca = gh, so ist alsdann aus leicht zu findenden Gründen △ cde = dem Rechtecke xbcd oder dem abgewickelten Zylindermantel, und △ cda = B oder der Grundfläche des Zylinders. Es verhält sich demnach:

F : B = △ cde : △ cda

△ cde : △ cda = ce : ca

F : B = ce : ca. Da nun ce nach der Voraussetzung = 2bc oder auch 2be und 2r = 2 × r ist, so ist auch ce : eb = 2r : r, folglich

ce × r = 2r × eb

eb = L der Höhe des Zylinders,

ce × r = 2r × eb = 2r × L, oder auch

ce × r = 2r × bc = 2r × L.

Ferner ist nach der Voraussetzung

$$L : R = R : 2r$$

$$R \times R = R^2 = 2r \times L$$

$$2r \times L = ce \times r$$

$$R^2 = ce \times r$$

$$ce : R = R : r$$

$ce : r = R \times R : r^2 = R^2 : r^2$; denn das erste Glied verhält sich zum vierten, wie das zweite mit dem dritten multiplicirt sich zum vierten, mit sich selbst multiplicirt verhält.

Da nun $r = ca$, so ist

$ce : ca = R^2 : r^2$, ferner war

$ce : ca = F : B$

$F : B = R^2 : r^2$

$C : B = R^2 : r^2$, denn Kreisfl. verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser;

$F : B = C : B$

$F \times B = C \times B$

$F = C$, wenn man in beiden Produkten den Factor B wegläßt.

Leichter läßt sich dies darstellen, wenn man sagt:

der Zylindermantel ist $= d\pi h$

die Kreisfläche ist $= R^2\pi$

$d\pi h = R^2\pi$. Läßt man in beiden Größen den Factor π weg, so bleiben sie in demselben Verhältnisse zu einander, folglich ist $dh = R^2$

$d : R = R : h$,

folglich muß R die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Zylindergrundfläche und dessen Höhe seyn, wenn der Kreis, welcher R zum Halbmesser hat, gleich der Zylinderoberfläche seyn soll.

Die Pyramide.

Ein Körper, der irgend eine ebene Figur zur Grundfläche, und so viele Dreiecke als die Grundfl. Seiten, zu Seitenflächen hat, heißt eine Pyramide. Nach der Zahl der Seitenfl. heißt die Pyramide eine 3-, 4-, 5-, 6seitige. So ist Fig. 121, Taf.

XVIII, eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfl. adb, und deren Seitenflächen die Dreiecke aqb, bqd und aqd sind.

Die Linien aq, bq und qd heißen Seitenlinien der Pyramide; der Punkt q, welcher allen Seitenflächen gemein ist, heißt die Spitze derselben.

Das Perpendikel qc, welches senkrecht von der Spitze auf die Grundfläche gezogen wird, giebt die Höhe der Pyramide an.

Fällt dieses Perpendikel von der Spitze genau in den Mittelpunkt der Grundfl., so heißt die Pyramide eine gerade, ist dies nicht der Fall, eine schiefe Pyramide.

Lehrsatz. Wenn man eine Pyramide mit einer Ebene gll. mit der Grundfläche durchschneidet, so ist die Durchschnittsfigur ähnlich der Grundfläche.

Beweis. Fig. 121 ist abd die Grundfl. der Pyramide, und efg der gll. Durchschnitt; es ist mithin ef gll. ab, eg gll. ad, fg gll. bd. Aus den geometrischen Sätzen über die Aehnlichkeit oder Proportionalität der Dreiecke ergiebt sich, daß

$$qe : qa = ef : ab = eg : ad = fg : bd,$$

mithin stehen die einzelnen Seiten der Durchschnittsfigur alle in demselben Verhältnisse zu den ähnlich liegenden Seiten der Grundfl.

Da nun ferner die Neigung der Seitenflächen, von der Grundfl. aus gerechnet, dieselbe ist und bleibt, wie bei der Durchschnittsfläche, so muß auch W. e = W. a, W. g = W. d, W. f = W. b seyn, mithin sind in den Dreiecken abd und efg die ähnlich liegenden W. gleich, die ähnlich liegenden Seiten stehen in einem und demselben Verhältnisse, mithin sind beide Dreiecke einander ähnlich, oder was dasselbe ist, die gll. Durchschnittsfigur ist ähnlich der Grundfläche. Das Größenverhältniß der Durchschnittsfigur zu dem der gll. Grundfl. kann auf mancherlei Weise ausgedrückt werden: z. B.

1) Die Fläche der Durchschnittsfigur verhält sich zur Grundfläche, wie das Quadrat irgend einer Seitenlinie der erstern zum Quadrate der ähnlich liegenden Seitenlinie der letztern, also (Fig. 121) wie ef^2 zu ab^2, wie eg^2 zu ad^2, wie fg^2 zu bd^2.

2) Die Fläche der Durchschnittsfigur verhält sich zur Grundfläche, wie das Quadrat des Stücks einer Seitenlinie von der

Spitze bis zur Durchschnittsfläche zu dem Quadrate der ganzen Seitenlinie, also (Fig. 121) wie eq^2 zu aq^2, oder wie qg^2 zu qd^2, oder wie qf^2 zu qb^2.

3) Die Durchschnittsfigur verhält sich zur Grundfläche, wie das Quadrat des Perpendikels von der Spitze auf die Durchschnittsfigur zum Quadrate der Höhe der Pyramide, also (Figur 121) wie qo^2 zu qc^2.

4) Wenn man überhaupt eine Pyramide mit mehreren parallelen Ebenen durchschneidet, sie mögen mit der Grundfläche gll. gehen oder nicht, so verhalten sich die Flächen dieser Durchschnittsfiguren, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Diese vier Sätze lassen sich leicht aus der Proportionalität der Dreiecke entwickeln, wenn man Fig. 124 dazu benutzt; denn es läßt sich leicht finden, daß wie db 1 Theil, bh 2 Th. und ba 3 Th. hat, so hat auch df 1 Th., wie hn 2 Th. und ap 3 Th. u. s. w.; ferner hat auch dgfe 1 Th., wie hkmn 4 Th., wie aocp 9 Th., oder

$$dgfe = 1^2 = 1$$
$$hkmn = 2^2 = 4$$
$$aocp = 3^2 = 9.$$

Lehrsatz. Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind an körperlichem Inhalt einander gleich.

Beweis. Die beiden Pyramiden A und B, Figur 131 und 132, haben gleich große Grundflächen und Höhen. Man denke sich nun, die Grundflächen lägen in einer Ebene, ferner denke man sich die Höhe beider in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspunkte mit den Grundflächen parallele Ebenen gelegt; hierdurch werden beide Pyramiden in unendlich viele körperliche Stücke getheilt, wovon man jedes als ein Prisma ansehen kann, welches eine der Durchschnittsflächen zur Grundfläche, und den unendlich kleinen Theil der Höhe zur Höhe hat. Alle diese Prismen, so wie sie in beiden Pyramiden der Ordnung nach folgen, haben gleiche Grundfläche und Höhe, und sind demnach an körperlichem Inhalte gleich, z. B. das erste Prisma zunächst der Grundfläche in A ist gleich dem ersten Prisma zunächst der Grundfläche in B u. s. w. Nimmt man nun eine beliebige Durchschnittsfläche aus A und eine gleichliegende aus B, so daß beide durch einen und denfel-

den Theilungspunkt der Höhe gehn, wie in Fig. 131 und 132, so verhalten sich diese Durchschnittsflächen zu den dazu gehörigen parallelen Grundflächen, nach dem Vorigen, wie das Quadrat der Seitenlinie ec oder lk zum Quadrate der ganzen Seitenlinie ca oder kh, oder auch: wie das Quadrat des Perpendikels von der Spitze auf die Durchschnittsfläche zum Quadrat der Höhe der ganzen Pyramide. Da nun für beide Durchschnittsflächen die Perpendikel von der Spitze und eben so die ganzen Höhen beider Pyramiden sich gleich sind, so hat auch jede durch denselben Punkt der Höhe gelegte Durchschnittsfigur der Pyramiden zu der ähnlichen Grundfläche dasselbe Verhältniß in A wie in B, daher müssen auch, da die Grundflächen beider Pyramiden einander gleich sind, die Durchschnittsflächen es auch seyn; nun ist aber auch die Höhe in allen diesen Prismen, in welche die Pyramiden getheilt wurden, gleich, mithin sind die gleich hoch gelegenen Prismen, mithin auch die Summe aller Prismen in A, gleich der Summe aller Prismen in B, mithin auch die Pyramide A an Inhalt gleich der Pyramide B.

Lehrsatz. Ein jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei gleich große Pyramiden theilen, von welchen zwei mit dem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe haben, oder

Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Inhalts eines Prisma, das mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Man denke sich das dreiseitige Prisma, Figur 125, mit einer Ebene dbf durchschnitten, welche durch den Endpunkt b einer Grundfläche nach der in der entgegengesetzten Seitenfläche gelegenen Seite df der andern Grundfläche geht. Hierdurch wird vom Prisma eine Pyramide abgeschnitten, die zur Grundfläche def und zur Spitze b, also Grundfläche und Höhe mit dem Prisma gemeinschaftlich hat. Man denke sich ferner die Pyramide, Fig. 126, vom Prisma getrennt; der übrig bleibende Theil des Prisma, Fig. 127, welcher eben so wie die getrennte Pyramide die Durchschnittsfigur dbf zur Seitenfläche hat, ist auch eine Pyramide, welche zur Grundfl. das Parallelogramm adcf und b zur Höhe hat.

Fig. 128 stellt die Fig. 127 von der Seite gesehen vor. Theilt man jetzt die Grundfläche adcf durch die Ecklinie dc in

die beiden Dreiecke adc und dfc, und legt durch dc und die Spitze b die Ebene dbc, so wird diese Pyramide dadurch in zwei dreiseitige Pyramiden getheilt, welche gleiche Grundfläche und Höhe, mithin gleichen Inhalt haben. Die Fig. 129 und 130 stellen diese beiden Pyramiden vor.

In Fig. 129 kann man abc als Grundfläche und d als Spitze der Pyramide betrachten, und alsdann hat diese Pyramide mit dem Prisma (Fig. 125) und mit der Pyramide (Figur 126) gleiche Grundfläche und Höhe, daher ist Figur 129 gleich der Fig. 126, Fig. 129 aber ist gleich der Fig. 130, folglich ist das Prisma in drei Pyramiden von gleichem Inhalte zerlegt, von denen zwei mit dem Prisma gleiche Grundfläche haben.

Hieraus ergiebt sich nun, daß der Inhalt einer Pyramide gleich ist $\frac{1}{3}$ des Inhalts eines Prisma, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Aufg. Den Inhalt einer Pyramide zu finden.

Auflös. Man messe die Grundfläche einer Pyramide in einem bestimmten Quadratmaaße, und die Höhe durch Hülfe der Seitenlinie, multiplicire die Größe der Grundfläche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe, so ist das Produkt gleich dem Inhalte der Pyramide; oder auch, man multiplicire die Grundfläche mit der ganzen Höhe und dividire das Produkt durch 3, so giebt der Quotient den Inhalt der Pyramide. Z. B. die Grundfläche sey = 8□° 4□', die Höhe sey = 10' 4'', so ist die Rechnung folgende:

	8□°	4□'
	10'	4''
	80^{so}	32^{bo} 40^{cl} 16^{sl}
3)	26^{so}	18^{bo} 21^{cl} 9$\frac{1}{3}$^{sl}
	27^{so}	93^{cl} 9$\frac{1}{3}$^{sl}

Erklärung. Ein Körper, der zwei gll. ähnliche Figuren zu Grundflächen hat, und dessen Seitenlinien verlängert in einem Punkte über der kleinern Grundfläche zusammentreffen, heißt eine abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide. Fig. 133, Taf. XX, stellt eine solche abgestumpfte Pyramide vor, abc ist die Grundfläche und def die Abstumpfungsfläche. Beide Flächen sind gll. und ähnlich. Die kleine Pyramide defo ist dasjenige Stück, welches die abgest. Pyramide zu der größern Pyr. abco ergänzt.

Aufg. Den Inhalt einer abgestumpften Pyramide zu finden.

Auflös. Man betrachte die abgest. Pyr. abcdef als eine vollständige abco, berechne deren Inhalt, so wie auch den Inhalt des Ergänzungsstückes defo, ziehe letzteres vom ersten ab, so bleibt der Inhalt der abgest. Pyr. übrig. Gesetzt es wäre

$26^{so}\ 120^{cl}\ 5^{sl}$ der Inhalt der ganzen Pyramide,
$11^{so}\ 102^{cl}\ 1^{sl}$ der Inhalt des Ergänzungsstückes, so ist
$15^{so}\ 18^{cl}\ 4^{sl}$ der Inhalt der abgest. Pyramide.

Ist der Inhalt der ganzen Pyr., so wie der des abgeschnittenen Stückes aus den gegebenen Seiten der Grundfl., der Durchschnittsfl. und den Seitenlinien zu suchen, und die Höhe der ganzen Pyr. ist nicht gegeben, so verfahre man auf folgende Weise:

Gesetzt die Grundfl. der ganzen Pyr. und die des abgeschnittenen Stücks wären Quadrate; erstere A, letztere B, eg sey die Höhe der ganzen Pyr., fe = y = der Höhe des abgeschnittenen Stücks, alsdann ist eg das Perpendikel für beide Grundflächen, welches senkrecht auf beiden Flächen, mithin auch auf den Diagonalen ab und cd steht, und eg — fe, oder eg — y = fg ist gleich der Höhe der abgest. Pyr. oder = dem Abstande der beiden Grundflächen von einander. Alsdann wäre der Inhalt der ganzen Pyr. = $\frac{1}{3}$ A mal (fg + y), und der Inhalt des abgeschnittenen Stückes = $\frac{1}{3}$ B mal y. Wären nun (fg + y) oder eg und y bekannt, so wäre die Berechnung leicht anzustellen, so sind sie aber unbekannt, und müssen erst aus den Seitenlinien der beiden Grundflächen oder aus ax und co und aus der Seitenlinie ac gesucht werden, und dies würde geschehen, indem man cn gll. mit eg zieht, und nun schließt:

$$cd^2 = co^2 + od^2$$

$$cd = \sqrt[2]{co^2 + od^2}$$
$$cf = \tfrac{1}{2}\, cd$$

$$cf = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{co^2 + od^2},\ \text{ferner}$$

$$ab^2 = ax^2 + xb^2$$

$$ab = \sqrt[2]{ax^2 + xb^2}$$
$$ag = \tfrac{1}{2}\, ab$$

$$ag = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{ax^2 + xb^2}.$$

Da co, od, ax und xb bekannt sind, so lassen sich leicht die

Linien cf und ag berechnen; da ferner cd gll. ab, und cn gll. fg, so ist auch cf = ng, mithin ist an = ag — ng = ag — cf, und es ist also auch an bekannt. Daraus, daß cn gll. eg, ergiebt sich ferner, daß

Δ acn $\sim$ Δ aeg

an : ag = cn : eg

cn = fg

an : ag = fg : eg

Da nun das Produkt der beiden äußern Glieder gleich ist dem Produkte der beiden innern, so ist

$$eg \times an = ag \times fg$$

$$\frac{eg \times an}{an} = \frac{ag \times fg}{an}$$

$$eg = \frac{ag \times fg}{an}.$$

Jetzt ist die Höhe der ganzen Pyramide bekannt, so wie es die Grundfl. ist, folglich kann nun auch der Inhalt der ganzen Pyr. berechnet werden; nun ist aber eg — fg = ef = y = der Höhe des abgeschnittenen Stücks, also kann auch diese kleine Pyr. berechnet werden, da nun Höhe und Grundfläche derselben bekannt sind.

Anm. Wenn nicht fg, sondern die Seitenlinie ac gegeben seyn sollte, so läßt sich fg leicht finden und als bekannt hinstellen, weil fg = cn, cn^2 aber = $ac^2 - an^2$, mithin

cn oder fg = $\sqrt[2]{(ac^2 - an^2)}$ ist.

Gesetzt die Grundfl. der Pyr. wären Rechtecke, und es wäre co = 4′, od = 9′, ax = 16′, xb = 36′, und gf = 20′, so ist

$cd^2 = co^2 + od^2 = 4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$

$cd = \sqrt[2]{97} = 9{,}849'$

$cf = \frac{1}{2}\, cd = \frac{9{,}849'}{2} = 4{,}924'$. Ferner ist

$ab^2 = ax^2 + xb^2 = 16^2 + 36^2 = 256 + 1296 = 1552$

$ab = \sqrt[2]{1552} = 39{,}395'$

$ag = \frac{1}{2}\, ab = \frac{39{,}395'}{2} = 19{,}697'$

an = ag — ng = ag — cf — 19,697′ — 4,924′ = 14,773′

ferner

$$an : ag = fg : eg$$

$$14{,}773' : 19{,}697' = 20' : eg$$

$$eg = \frac{19{,}697' \times 20'}{14{,}773'} = 26{,}666'$$

$$fg = 20{,}000'$$

$$eg - fg = 26{,}666 - 20{,}000 = 6{,}666'$$

$$ef = y = 6{,}666'.$$

Es ist nun der Inhalt des obern abgeschnittenen Stückes der Pyr. $= \frac{4 \times 9 \times 6{,}666}{3} = 79{,}992^{c'}$, und der Inhalt der ganzen Pyr. ist $= \frac{16 \times 36 \times 26{,}666'}{3} = 5119{,}872^{c'}$; mithin ist der Inhalt der abgestumpften Pyramide $= 5119{,}872^{c'} - 79{,}992^{c'} = 5039{,}880^{c'}$.

Das was hier von der vierseitigen Pyr. gesagt wurde, gilt auch von der 3=, 5=, 6seitigen Pyr., denn es läßt sich jedes Polygon so berechnen, daß man seinen Inhalt in Flächenmaaß nach □° □' u. s. w. angeben kann, und bei jeder Pyramide läßt sich die Höhe durch verschiedene geometrische Hülfsmittel, wie in Fig. 134 die Perpendikel auf die Grundfl. cn und eg, aus den zu messenden Seitenlinien der Pyr. ae, eb, ex u. s. w., und aus den Seitenlinien der Grundfl. ax, xb oder co und od finden; diese Hülfsmittel werden nach Maaßgabe der gegebenen und bekannten Stücke, und der verschiedenen Gestaltung der Pyramiden verschieden seyn.

Machen wir das, was hier von besondern Fällen gesagt wurde, allgemein, und nennen an einer abgestumpften Pyr.

die große Grundfl. G,
die Durchschnittsfl. g,
die Höhe der abgestumpften Pyr. H,
= = des fehlenden Stücks h, und ist also die Höhe der ganzen Pyr. $= H + h$,

so wird der Inhalt der abgestumpften Pyr. auf folgende Weise gefunden werden:

Nach dem eben Gesagten ist der Inhalt der ganzen vollständigen Pyr. $= \frac{1}{3} G \times (H + h)$, der des fehlenden Stücks $= \frac{1}{3} g \times h$, also der Inhalt der abgestumpften Pyr. $= \frac{1}{3} G \times (H + h) - \frac{1}{3} g \times h$.

Nun ist aber $(H + h)^2 : h^2 = G : g$

$H + h : h = \sqrt[2]{G} : \sqrt[2]{g}$

$H \times \sqrt[2]{g} + h \times \sqrt[2]{g} = h \times \sqrt[2]{G}$

$H \times \sqrt[2]{g} + h \times \sqrt[2]{g} - h \times \sqrt[2]{g} = h \times \sqrt[2]{G} - h \times \sqrt[2]{g}$

$H \times \sqrt[2]{g} = h \times \sqrt[2]{G} - h \times \sqrt[2]{g} = h \times (\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g})$

$$h = \frac{H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}}$$

$$H + h = \frac{H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}} + H$$

der Inhalt der ganzen Pyr. $= \frac{1}{3} G \times \left(\frac{H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}} + H \right)$

der Inhalt der Ergänzungspyramide ist $= \frac{1}{3} g \times \frac{H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}}$,

also ist der Inhalt der abgestumpften Pyramide

$$= \frac{1}{3} G \left(\frac{H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}} + H \right) - \frac{1}{3} g \times \frac{H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}}$$

$$= \frac{1}{3} G \frac{(H \times \sqrt[2]{g} + H \times \sqrt[2]{G} - H \times \sqrt[2]{g}) - \frac{1}{3} g \times H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} G \times H \times \sqrt[2]{G} - \frac{1}{3} g \times H \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}}$$

$$= \frac{1}{3} H \times \frac{G \times \sqrt[2]{G} - g \times \sqrt[2]{g}}{\sqrt[2]{G} - \sqrt[2]{g}}$$, und wird diese Division ausgeführt, so drückt sich der Inhalt der abgestumpften Pyramide durch die Formel aus:

$= \frac{1}{3} H \times (G + \sqrt[2]{G \times g} + g)$

Anm. Die Anwendung dieser Formel wird jeder Lehrer leicht selbst machen können, wenn er die Buchstaben in gewisse beliebige Zahlenverhältnisse umsetzt.

Lehrsatz. Wenn man von einer Pyramide ein Stück abschneidet, so daß der Schnitt mit der Grundfl. gll. ist, so ist das abgeschnittene Stück

der ganzen Pyr. ähnlich. Fig. 134, Taf. XX, sollen die Durchschnittsfl., und Grundfl. Quadrate seyn.

Beweis. co gll. ax, und od gll. xb

$\triangle$ ceo $\sim$ $\triangle$ aex und $\triangle$ oed $\sim$ $\triangle$ xeb

$co : ex = co : ax = od : xb$

$co^2 : ax^2 = od^2 : xb^2$

$co^2 = od^2$ und $ax^2 = xb^2$

co^2 ähnlich ax^2. Da nun aber jede Seite der Pyr. zwei ähnliche Dreiecke enthält, auch die Grundfl. ähnlich sind, so ist die ganze und die abgeschnittene Pyr. von lauter ähnlichen Seiten eingeschlossen, und mithin einander im Ganzen ähnlich.

Lehrsatz. Aehnliche Pyr. verhalten sich wie die Würfel oder Cuben der ähnlich liegenden Seiten ihrer Grundfl.

Beweis. Man bezeichne zwei ähnliche Pyr. mit P und p, ihre Grundfl. mit G und g, ein Paar ähnlich liegende Seiten mit X und x, und ihre Höhen mit H und h, so ist nach Obigem

$G : g = X^2 : x^2$ und

$H : h = X : x$

$G \times H : g \times h = X^2 \times X : x^2 \times x = X^3 : x^3$. Nun verhält sich aber das Prod. $G \times H$ zum Prod. $g \times h$ wie $\frac{1}{3}\ G \times H$ zu $\frac{1}{3}\ g \times h$, oder wie der Inhalt der großen Pyr. P zum Inhalte der kleinen Pyr. p, folglich

$P : p = G \times H : g \times h = X^3 : x^3$

$P : p = X^3 : x^3$

Vom Kegel.

Erklärung. Eine Pyramide, deren Grundfl. ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten, oder ein Kreis ist, heißt ein Kegel, Taf. XVIII, Fig. 122.

Wenn eine gerade Linie ah von der Spitze des Kegels nach dem Mittelpunkte der Grundfl. gezogen wird, so heißt diese die Achse des Kegels.

Steht nun die Achse senkrecht auf der Grundfl., so ist der Kegel ein senkrechter, ist dies nicht der Fall, so heißt er ein schiefer.

Jede Linie, von der Spitze des Kegels nach der Peripherie der Grundfl. gezogen, heißt eine Seitenlinie desselben. Bei jedem senkrechten Kegel, welcher dadurch entsteht, daß (Fig. 122,

Taf. XVIII) das rechtwinkl. Dr. ahk sich um eine Cathete ah, welche die Achse des Kegels ist, bewegt, bis es wieder in seine erste Lage kommt, sind die Seitenl. einander alle gleich; bei einem schiefen Kegel hingegen werden die Seitenl. immer kleiner, je spitzer der W. ist, den die Achse mit der Grundfl. macht, und immer größer, je stumpfer der W. ist, der von der Achse und der Grundfl. gebildet wird; so ist z. B. in Figur 135, Taf. XX, ab größer als jede Seitenl., welche von a nach dem Bogen b c gezogen werden kann.

Lehrsatz. Wenn ein Kegel gll. mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis.

Beweis. Es sey der Kegel bac, Fig. 122, Taf. XVIII, in de gll. mit der Grundfl. bc durchschnitten; man denke sich durch die Achse ah eine Ebene bac gelegt, welche die Grundfl. in bc und die Durchschnittsfl. in de schneidet, so ist

de gll. bc

Δ afe $\sim$ Δ ahc

ah : hc = af : fe, eben so

ah : hb = af : df

hc : hb = fe : df

hc = hb als Radien desselb. Kr.

fe = df.

Schneidet nun die durch die Achse gelegte Ebene die Grundfl. und Durchschnittsfl. noch irgend wo anders, z. B. in hk und fg, so ist auch

fg gll. hk

Δ ahk $\sim$ Δ afg

ah : hk = af : fg

ah : hc = af : fe

hk : hc = fg : fe

hk = hc als Radien desselb. Kr.

fg = fe

fe = df

fg = fe = df. Folglich sind alle Linien von f nach der Peripherie gleich, was nur in einem Kreise der Fall seyn kann, folglich muß auch die Durchschnittsfl. de ein Kreis seyn, wenn die Grundfl. bc einer ist.

Lehrsatz. Der Halbmesser der Grundfl. eines

Kegels verhält sich zum Halbmesser der gleichl. Durchschnittsfl. wie die Höhe des ganzen Kegels zum Abstand des Durchschnitts von der Spitze; also Fig. 122, hc : fe = ah : af. Der Beweis ergiebt sich leicht aus der Aehnlichkeit der Dr. ahc und afe.

Lehrsatz. Ein Kegel ist einer Pyramide gleich, die mit ihm gleiche Grundfl. und gleiche Höhe hat.

Beweis. Theilen wir sowohl des Kegels als der Pyramide Höhe in unendlich viele Theile, und legen in beiden durch jeden Theilungspunkt Durchschnittsflächen gll. mit der Grundfl., so wird der Kegel in unendlich viele Zylinder, und die Pyramide in unendlich viele Prismen so getheilt werden, daß sowohl die Zylinder als auch die Prismen immer kleiner werden, je näher sie nach der Spitze hin liegen; aber die in gleicher Ordnung folgenden Zylinder werden immer mit den in derselben Ordnung folgenden Prismen gleiche Grundfläche und Höhe, also auch gleichen Inhalt haben, so daß die Summe aller Zylinder im Kegel gleich der Summe aller Prismen in der Pyramide, mithin der Inhalt des Kegels gleich dem Inhalte der Pyramide seyn muß. Da nun ein Prisma und ein Zylinder von gleichen Grundflächen und Höhen, so wie auch eine Pyramide und ein Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen, an Inhalt einander gleich sind, die Pyramide aber $\frac{1}{3}$ des Inhals eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so folgt nothwendig, daß

der Kegel gleich ist $\frac{1}{3}$ desjenigen Zylinders, welcher mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, daß also Fig. 136, Taf. XX der Kegel aod = $\frac{1}{3}$ des Zylinders abcd.

Aufgabe. Den Inhalt eines Kegels zu finden.

Auflös. Aus dem Vorigen ergiebt sich, daß man die Grundfl. des Kegels mit seiner Höhe multipliciren, und das Produkt durch 3 dividiren muß, um den Inhalt des Kegels zu finden, das Produkt aus der Grundfl. und Höhe = $r^2 \pi h$ = dem Inhalte des Zylinders, der mit dem Kegel gleiche Grundfl. und Höhe hat, und $\frac{r^2 \pi h}{3}$ wird also gleich dem Inhalte des Kegels seyn.

Z. B. Ein Kegel habe 12′ Durchm. und 12′ Höhe, so ist $r = 6'$ und $r^2 = 36$, mithin

$$\pi = 3{,}14$$
$$r^2 = 36$$
$$1884$$
$$942$$
$$r^2 \times \pi \quad 113{,}04\square' \text{ Grundfl. des K.}$$
$$12' \text{ Höhe des K.}$$
$$22608$$
$$11304$$
$$r^2 \times \pi \times h = 1356{,}48^{cl}$$
$$3) \quad 452{,}16^{cl} \text{ Inhalt des Kegels.}$$

Man hätte auch die $113{,}04\square'$ Grundfl. nur mit dem dritten Theile der Höhe, mit 4, multipliciren können, und hätte dasselbe Resultat erhalten.

Aufgabe. Den Inhalt eines mit der Grundfläche gll. abgestumpften Kegels zu finden. Figur 137, Taf. XX.

Auflösung. Man befolge ganz dasselbe Verfahren, wie bei der Pyramide, d. h. man denke sich den Kegel ergänzt, berechne den Inhalt des Ganzen und den des fehlenden Stücks, so giebt der Unterschied zwischen beiden den Inhalt des abgestumpften Kegels.

Um nun den Inhalt eines gegebenen abgestumpften Kegels zu bestimmen, sey R der Halbmesser der Grundfläche,

r = = = Abstumpfungsfl.,

H die Höhe des abgestumpften Kegels,

x die Höhe des fehlenden Stücks, so ist

$$H + x : x = R : r \text{ und}$$
$$H + x : H + x = R : R$$
$$H + x : H + x - x = R : R - r$$
$$H + x - x = H$$
$$H + x : H = R : R - r$$
$$(H + x) \times (R - r) = H \times R$$
$$\frac{(H + x) \times (R - r)}{(R - r)} = \frac{H \times R}{(R - r)}$$
$$H + x = \frac{H \times R}{(R - r)}, \text{ oder}$$

die Höhe des ganzen Kegels wird gefunden, wenn man die Höhe des abgestumpften Kegels mit dem Halbmesser der Grundfläche multiplicirt, und das Produkt durch eine Zahl, welche gleich ist dem Unterschiede zwischen dem Halbmesser der Grundfl. und dem Halbmesser der Abstumpfungsfl., dividirt. Hat man erst die Höhe des ganzen Kegels, so läßt sich auch sein körperlicher Inhalt, also auch der Inhalt des parallel abgekürzten Kegels finden, indem man nun leicht den Inhalt des abgeschnittenen Stückes von dem Inhalte des ganzen Kegels abzieht. Z. B.

die Höhe des abgestumpften Kegels sey 14',
der Halbmesser der Grundfläche sey 8',
= = = Abstumpfungsfl. = 6', wie groß ist der Inhalt des abgestumpften Kegels?

Auflösung.

$R : r = H + x : x$ oder $8 : 6 = 14 + x : x$

$R:R-r=H+x:H+x-x$ od. $8:8-6=14+x:14+x-x$

$R : R - r = H + x : H$ oder $8 : 8 - 6 = 14 + x : 14$

$R \times H = (R - r) \times (H + x)$ od. $8 \times 14 = (8-6) \times (14 + x)$

$$\frac{H \times R}{R - r} = H + x \text{ oder } \frac{8 \times 14}{(8-6)} = 14 + x$$

$$H + x = 14 + x = \frac{8 \times 14}{(8-6)} = \frac{112}{2} = 56 \text{ oder}$$

56' sind die Höhe des ganzen Kegels; da nun 14' = der Höhe des abgestumpften Kegels ist, so ist x, oder die Höhe des Ergänzungsstückes = 42'. Nun ist ferner der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{R^2 \times \pi \times H}{3} = \frac{8 \times 8 \times 3{,}14 \times 56}{3} =$

$\frac{11253{,}76}{3} = 3751{,}25^{c'}$, der Inhalt des Ergänzungsstückes aber ist $= \frac{r^2 \times \pi \times x}{3} = \frac{6 \times 6 \times 3{,}14 \times 42}{3} = \frac{4747{,}68}{3}$ $= 1582{,}56^{c'}$; zieht man nun vom Inhalte des ganzen Kegels oder von $3751{,}25^{c'}$ den Inhalt des Ergänzungsstückes oder $1582{,}56^{c'}$ ab, so bleiben $2168{,}69^{c'}$ für den Inhalt des abgestumpften Kegels.

Anmerkung. Man bedient sich zur Berechnung eines mit der Grundfl. parallel abgestumpften Kegels, z. B. bei

Berechnung der Baumstämme, auch noch anderer Mittel, bei deren Gebrauch es aber auf einen kleinen Fehler nicht ankommen darf. Man sucht nemlich den mittlern Durchmesser zwischen dem Durchm. der Grundfläche und dem Durchm. der Abstumpfungsfl., den man findet, wenn man die Summe beider Durchm. durch 2 dividirt. Z. B. Eine Eiche hat unten 4' Durchm., an der Abschnittsfl. 2', so ist der mittlere Durchm. $= \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3'$; wäre nun die Länge des Baumstammes 30', so wäre sein Inhalt $= 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} \times 3{,}14 \times 30$.

Auf diese Weise berechnet man wohl auch den Inhalt einer Tonne, indem man sie als zwei abgestumpfte Kegel betrachtet, die mit den Grundflächen zusammen hängen; nur giebt diese Berechnung einen nicht unbedeutenden Rechnungsfehler.

Lehrsatz. Haben zwei Kegel gleiche Grundflächen, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, haben sie aber gleiche Höhen, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Der Beweis ist nach dem Vorhergehenden leicht zu führen.

Aufg. Den Inhalt der Seitenfläche eines senkrechten Kegels zu finden.

Auflös. Man multiplicire den Umfang der Grundfl. mit der halben Seitenlinie des Kegels, so giebt das Produkt den Inhalt der Seitenfl. an.

Beweis. Denkt man sich den Umfang der Grundfl. in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und von der Spitze des Kegels nach den Theilungspunkten gerade Linien gezogen, so wird die ganze Seitenfl. des Kegels in unendlich viele Stücke getheilt, deren man jedes als ein geradlinigtes Dreieck ansehen kann, welches den kleinen Theil des Umfangs zur Grundlinie, und die Seitenlinien des Kegels zur Höhe hat. Nun wird aber der Flächenraum eines Dreiecks gefunden, wenn man die Grundl. mit der halben Höhe multiplicirt, und darum findet man den Inhalt aller dieser kleinen Dr., oder die Seitenfl. des senkrechten Kegels, wenn man die Summe der Grundl., oder den Umfang der Grundfl., mit der halben Höhe der Dr. oder

mit der halben Seitenl. des Kegels multiplicirt. Der Umfang der Grundfl. = D × π oder Durchm. mal 3,14, also ist die Oberfl. oder der Mantel des senkrechten Kegels = D × π × $\frac{S}{2}$. Z. B. die Seite des Kegels sey 4′, der Durchm. 3′, so ist der Mantel des Kegels = 3 × 3,14 × $\frac{4}{2}$ = 3 × 3,14 × 2 = 18,84□′.

Aufgabe. Die Oberfläche eines parallel abgestumpften Kegels zu finden.

Auflös. Man denke sich den parallel abgestumpften Kegel ergänzt, und ebenfalls von der Spitze nach den Theilungspunkten der Peripherie der Grundfl. gerade Linien gezogen; hierdurch wird die Oberfl. des abgestumpften Kegels in unendlich viele Parallel-Trapeze getheilt. Nimmt man nun zur Höhe eines jeden Trapezes die Seitenl. des abgest. K., so werden die Theile der Peripherien des K., zwischen welchen der abgest. K. enthalten ist, die gll. Grundl. dieser Trapeze seyn; der Inhalt eines Trapezes aber wird gefunden, wenn man die Summen der beiden Grundl. mit der halben Höhe multiplicirt; also findet man den Inhalt aller dieser Trapeze, oder die Seitenfl. des abgest. Kegels, wenn man die Summen der Peripherien beider Kreise, zwischen welchen der Kegel enthalten ist, mit der halben Seitenl. multiplicirt. Z. B. die Grundfläche habe 6′ Durchm., die parallele Abstumpfungsfl. 4′, die Seitenl. des abgestumpften Kegels sey 10′, so ist die

Peripherie der Grundfl. = 6 × 3,14 = 18,84′, die
" " Abstumpffl. = 4 × 3,14 = 12,56′
31,40′ = der

Summe beider Peripherien; multiplicirt man dies mit $\frac{1}{2}^0$ = 5, so ist das Produkt oder der Mantel des abgest. K. = 5 × 31,4 = 157 □′.

Um ein Stück der Seitenfl. eines senkrechten Kegels, welches zwischen zwei gegebenen Seitenl., z. B. zwischen ab und ak (Fig. 122, Taf. XVIII), enthalten ist, zu finden, multiplicire man den Bogen bk, welcher das zu findende Stück der Seitenfl. begrenzt, mit der halben Seitenlinie.

Anmerkung. Das beim senkrechten Kegel angewendete Verfahren, die Seitenfl. eines vollständigen oder auch eines

parallel abgeſt. K. zu finden, läßt ſich auf den ſchiefen Kegel nicht anwenden, weil jedes der Dr., worin die Seitenfl. eines ſchiefen K. getheilt wird, eine andere Höhe enthält.

Eben ſo iſt auch der Inhalt eines ſchief abgeſchnittenen ſenkrechten Kegels, und der Inhalt eines ſchief abgeſchnittenen ſchiefen Kegels nach dem erwähnten Verfahren nicht zu finden, ſondern es macht dieſer Gegenſtand einen beſondern Lehrabſchnitt in der höhern Mathematik, die Lehre von den Kegelſchnitten, aus.

So wie die ſchiefe Pyramide $= \frac{1}{3}$ des Inhalts desjenigen Prisma iſt, das mit ihr gleiche Grundfl. und gleiche ſenkrechte Höhe hat, ſo muß auch der Inhalt eines ſchiefen Kegels gleich ſeyn $\frac{1}{3}$ des Inhalts eines geraden Zylinders, der mit ihm gleiche Grundfl. und gleiche ſenkrechte Höhe hat.

Lehrſatz. Die Oberfläche eines ſenkrechten oder geraden Kegels verhält ſich zur Grundfläche wie ſeine Seitenl. zum Halbm. der Grundfl.

Beweis. Die Oberfl. des K. $= D \times \pi \times \frac{S}{2}$

die Grundfl. des K. $= r^2 \times \pi = \frac{2r^2 \times \pi}{2}$

$$\frac{D \times \pi \times S}{2} : \frac{2r^2 \times \pi}{2} = D \times \pi \times S : 2r^2 \times \pi$$

$$- : - = D \times S : 2r^2$$

$$- : - = 2r \times S : 2r^2$$

$$- : - = r \times S : r^2$$

$$- : - = r \times S : r \times r$$

$$- : - = \frac{r \times S}{r} : \frac{r \times r}{r}$$

$$- : - = S : r.$$

Von der Kugel.

Die Kugel iſt ein von einer krummen Oberfläche eingeſchloſſener Körper, in welchem ein Punkt im Körper von allen Punkten der Oberfläche gleich weit entfernt iſt; dieſer Punkt heißt der Mittelpunkt der Kugel, Fig. 138 der Punkt c. Eine gerade Linie vom Mittelpunkte nach irgend einem Punkte der Oberfläche gezogen, heißt der Halbmeſſer der Kugel

(Fig. 138 ac oder cd), so wie auch eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt geht, und die Oberfl. der Kugel in zwei entgegengesetzten Punkten berührt, ein Durchmesser der Kugel genannt wird, Fig. 138 ad.

Grundsatz. Alle Halb- und Durchmesser einer und derselben Kugel sind einander gleich, wie alle Halb- und Durchmesser eines und desselben Kreises einander gleich sind.

Der körperliche Raum einer Kugel wird dadurch entstehen, daß sich ein Halbkreis fgdh um seinen Durchmesser fh so lange herum dreht, bis er wieder an seiner ersten Stelle angekommen ist. Der Mittelpunkt, der Halbmesser und der Durchmesser des Halbkreises ist auch der Mittelpunkt, der Halbmesser und der Durchmesser der entstandenen Kugel.

Wenn irgend eine Ebene die Kugel schneidet, so heißt derjenige Theil der Ebene, welcher innerhalb der Kugel liegt, ein Kugelschnitt ekgm; jedes der körperlichen Stücke, in welche die Kugel durch eine solche Ebene getheilt wird, heißt ein Kugelsegment oder Kugelabschnitt ekgmf.

Jeder Kugelschnitt, er mag liegen, wie er will, muß immer ein Kreis seyn, aus welchem Grunde alle Kugelabschnitte immer eine Kreisfl. zur Grundfl. haben.

Kugelschnitte, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, heißen größte Kreise, alle übrigen kleine Kreise der Kugel.

Alle größte Kreise einer und derselben Kugel müssen immer gleich seyn, weil der Halbmesser der Kugel auch zugleich der Halbmesser der größten Kreise ist, und die kleinern Kreise werden immer kleiner, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind.

Eine Linie, wie Fig. 138 fh, welche durch den Mittelpunkt der K., so wie durch den Mittelpunkt eines Kegelschnitts geht, und auf dem letztern senkrecht steht, heißt die Achse der Kugel und des Kugelabschnitts, und die beiden Punkte f und h, in welchen die Achse die Oberfl. der Kugel trifft, heißen die Pole des Kugelschnitts. Die Pole sind von allen Punkten der Peripherie des Kugelschnitts gleich weit entfernt.

Kreise an einer Kugel, wie Fig. 138 andо und ekgm, deren Ebenen einander gleichlaufend sind, heißen Parallelkreise, und das zwischen diesen Kreisen enthaltene Stück der

Kugeloberfläche aegd heißt eine Zone oder ein Gürtel der Kugel.

Lehrsatz. Die Oberfläche oder der Mantel einer Kugel ist viermal so groß als die Fläche eines größten Kreises desselben.

Setzen wir den Halbm. der Kugel $= r$, so ist nach dem Obigen die Fläche eines größten Kreises $= r^2 \times \pi$ oder gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Halbm. mal 3,14, mithin wäre dann der Mantel der Kugel $= r^2 \times \pi \times 4$.

Beweis. Man denke sich den Durchmesser (Fig. 139) oh eines größten Kreises der Kugel in unendlich viele gleiche Theile cb, ba, ad, do getheilt, und durch die Theilungsp. Kugelschnitte senkrecht auf die Achse oh gelegt. Jeder dieser Kugelschnitte wird in einem Kreise die Oberfl. der Kugel schneiden, deren Halbm. die L. dn, am, bl, ck sind, die dadurch erhalten werden, daß man diese L. senkrecht auf oh zieht. Diese Halbm. sollen der Ordnung nach x, x', x'', x''' heißen. Betrachtet man nun diese Kreise als Grundflächen von Kegeln, die man so beschreibt, daß die Seitenl. eines jeden durch die Peripherie des nächst vorhergehenden Kugelschnitts geht, so ist das Stück der Kegeloberfl., welches zwischen zwei auf einander folgenden Kreisen enthalten ist, gleich der Kugelzone, welche zwischen denselben beiden Kreisen liegt; weil nemlich o, n und m einander unendlich nahe sind, so fallen die Kreisbogen on und nm mit den Sehnen on und nm zusammen, und sind mithin einander gleich. Nun findet man aber das zwischen der Grundfl. und einer mit derselben gll. Ebene enthaltene Stück der Oberfläche eines abgestumpften senkrechten Kegels, wenn man die Summe der Peripherien der Grundfl. und der gll. Durchschnittsfl. mit der Hälfte des zwischen denselben enthaltenen Stücks der Seitenl. multiplicirt. Um nun das zwischen den Kreisen, deren Halbm. x und x' sind, enthaltene Stück der Kugeloberfl., oder auch die Fläche der zwischen denselben gelegenen Kugelzone zu finden, bemerke man, daß n und m einander unendlich nahe sind, und daß das Stück der Seitenl. des Kegels nm gleich dem Bogen nm ist.

Da die Peripherie eines Kreises gleich $d \times \pi$ oder $2r \times \pi$ ist, so ist die Peripherie des zu x gehörenden Kreises $=$

$2 x \times \pi$, und die Peripherie des zu x' gehörenden Kreises ist $= 2 x' \times \pi$, mithin ist die Summe beider Peripherien $= 2 x \times \pi + 2 x' \times \pi = 2 \pi \times (x + x')$. Da aber x unendlich nahe x' ist, so ist $x = x'$, mithin wäre die Summe beider Peripherien $= 2 \pi \times 2 x$; die Seitenlinie des Kegels ist hier nm, mithin die Hälfte derselben $= \frac{nm}{2}$; es wäre demnach die Fläche der Kugelzone $= 2 \pi \times 2 x \times \frac{nm}{2}$, und wenn der Multiplicator 2 gegen den Divisor 2 sich hebt $= 2 \pi \times x \times nm$.

Auf diese Weise findet man die zwischen den Halbm. x, x', x'' und x''' enthaltenen Kugelzonen der Ordnung nach $2 \pi \times x' \times ml$, $2 \pi \times x'' \times lk$ u. s. w., und würde durch dieses Verfahren und durch Zusammenziehung der erhaltenen Resultate die Kugeloberfläche näherungsweise erfahren; jedoch würde, da x, x', x'', x''' so wie nm, ml, lk alle verschieden sind, die vollständige Berechnung sehr mühsam seyn. Um nun leichter zum Ziele zu kommen, fälle man von n auf am das Perp. nq, und ziehe den Halbmesser nc. Da n und m einander unendlich nahe sind, so läßt sich nm als eine gerade Linie betrachten, welche mit der Tangente von n zusammen fällt, folglich ist alsdann Dr. mnq ein geradl. Dr., und der W. bei n oder mnc ist ein r. W. Nun ist Fig. 140 W. mnc = W. z + W. y, ferner ist W. dnq = W. v + W. y = einem r. W., folglich ist W. z + W. y = W. v + W. y, folglich ist auch W. z = W. v; da nun ferner W. s als r. W. = ist dem W. t, so muß auch W. m = dem W. u seyn, folglich sind in den beiden Dr. dnc und qnm die ähnlich liegenden W. gleich, folglich ist Dr. dnc ähnlich dem Dr. qnm, folglich ist

$$nc : dn = nm : nq$$
$$dn = x$$
$$nc : x = nm : nq$$
$$x \times nm = nc \times nq$$
$$nq = da$$
$$x \times nm = nc \times da.$$

Setzt man nun diesen letzten Werth statt $x \times nm$ in die vorher für die Kugelzone gefundene Formel, so erhält man die

Oberfläche der zwischen x und x' gelegenen Kugelzone = 2 π × x × nm = 2 π × nc × da, oder, wenn man den Halbmesser der Kugel r nennt, so ist der Inhalt der Kugelzone = 2 π × r × da.

Durch dasselbe Verfahren kann man nun die Fläche einer jeden folgenden Zone finden; die zwischen x' und x'' enthaltene ist (Fig. 139) = 2 π × r × ab u. s. w. Man findet darum die Fläche aller Kugelzonen oder die Oberfl. der Kugel, wenn man alle gefundenen Werthe zusammenzählt, d. h. die Oberfläche der Kugel ist = 2 π × r × od + 2 π × r × da + 2 π × r × ab, und so weiter fortgefahren bis h.

Nun ist aber od + da + ab + bc + ce + ef + fg + gh = oh oder = 2 r, mithin ist die Kugeloberfläche = 2 π × r × 2 r = π × 2 r × 2 r = π × 4 r × r = π × 4 r² oder 4 r² × π. Da aber r² π = dem Inhalte eines größten Kreises ist, so ist mithin die Oberfl. einer Kugel viermal so groß als ein größter Kreis derselben.

Aufgabe. Eine Kugel habe 24' Durchmesser, wie groß ist ihre Oberfl.?

r =	12'
r² =	144 □'
4r² =	576 □'
π =	3,14
	2304
	576
	1728
4r² × π =	1808,64 □'.

Anmerkung. Die Fläche der zwischen dn und bl gelegenen Kugelzone findet man nach dem so eben gelehrten Verfahren, wenn man die Peripherie eines größten Kreises der Kugel mit der Höhe der Zone multiplicirt.

Lehrsatz. Die Oberfl. von zwei Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

Beweis. Denken wir uns eine Kugel A, ihr Halbmesser R, und eine Kugel B, ihr Halbmesser r, so ist

A : B = 4 π × R² : 4 π × r²

4 π × R² : 4 π × r² = R² : r²

A : B = R² : r².

Aufgabe. Man soll aus der Oberfl. einer Kugel den Halbmesser derselben finden.

Auflös. Man setze die Oberfl. = F, so ist

$$F = 4\pi \times r^2$$

$$\frac{F}{4\pi} = \frac{4\pi \times r}{4\pi}$$

$$\frac{F}{4\pi} = r^2$$

$$\sqrt[2]{\frac{F}{4\pi}} = r.$$

Lehrsatz. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist dem Inhalte einer Pyramide gleich, welche eine der Oberfl. der Kugel gleiche Figur zur Grundfl., und den Halbm. der Kugel zur Höhe hat.

Beweis. So wie wir uns den Kreis, bei Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem Durchm. und dem Umkreise desselben, als aus unendlich vielen geraden Linien bestehend dachten, so können wir uns auch die Oberfläche einer Kugel als aus unendlich vielen ebenen Flächen bestehend denken. Nehmen wir nun jede solche kleine Fläche als die Grundfl. einer Pyramide an, deren Spitze mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt, so erhalten wir unendlich viele solche kleine Pyramiden, die den Halbmesser der Kugel zur Höhe haben; mithin ist der körperliche Inhalt aller dieser Pyramiden = dem körperlichen Inhalte der Kugel = dem Inhalte einer einzigen Pyramide, welche die Kugeloberfl. zur Grundfl. und den Halbm. der Kugel zur Höhe hat.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die Oberfl. der Kugel mit dem dritten Theile des Halbm. oder mit dem sechsten Theile des Durchm., so giebt das Produkt den Inhalt der Kugel an. Setzt man den Halbm. der Kugel = r, so ist die Oberfl. derselben $= 4\pi \times r^2$, folglich ist der Inhalt der Kugel $= 4\pi \times r^2 \times \frac{r}{3} = 4\pi \times \frac{r^3}{3}$.

Beweis. Die Kugel ist an Inhalt einer Pyramide gleich,

welche die Oberfl. der Kugel zur Grundfl. und den Halbm. derselben zur Höhe hat, der körperliche Inhalt einer Pyramide aber ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und $\frac{1}{3}$ der Höhe derselben.

Aufgabe. Eine Kugel habe 24' Durchmesser, wie groß ist ihr körperlicher Inhalt?

Auflösung. $r = 12'$

$r^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728^{cl}$

$\frac{r^3}{3} = 576^{cl}$

3,14

2304
576
1728

$\pi \times \frac{r^3}{3} = 1808,64^{cl}$

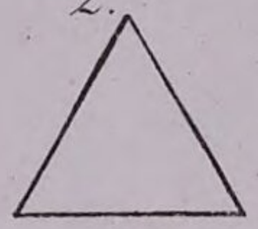
4

$7234,56^{cl}$.

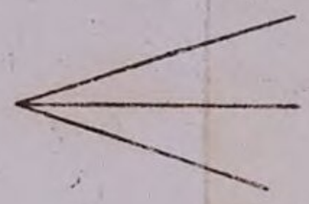
Druck von A. M. Colditz in Jüterbog.

1.

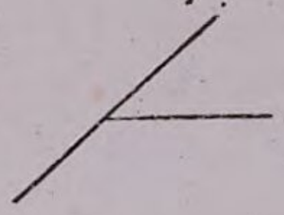
2.



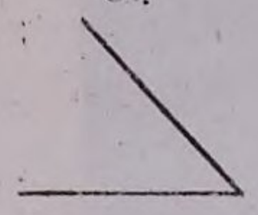
3.



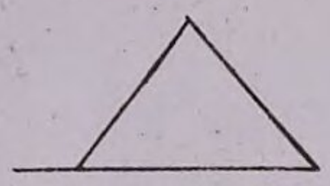
4.



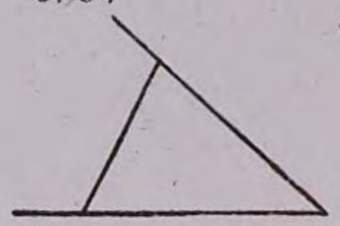
5.



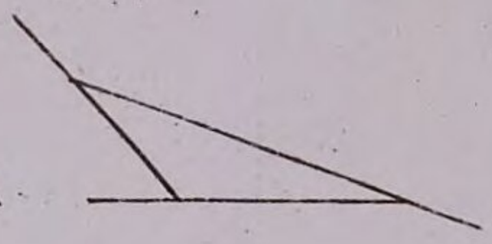
6.a.



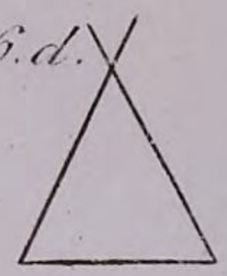
6.b.



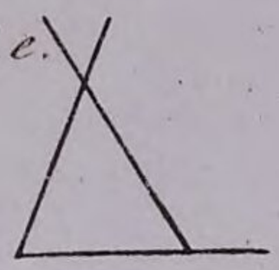
6.c.



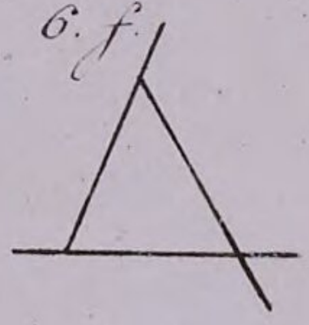
6.d.



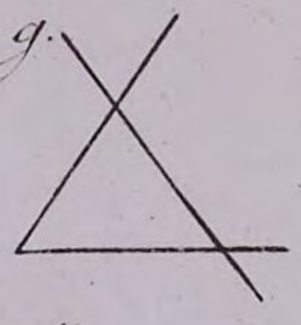
6.e.



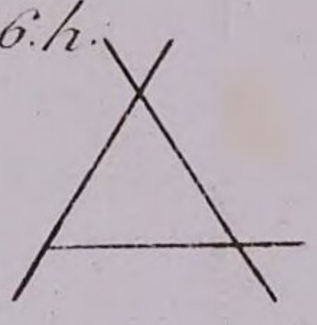
6.f.



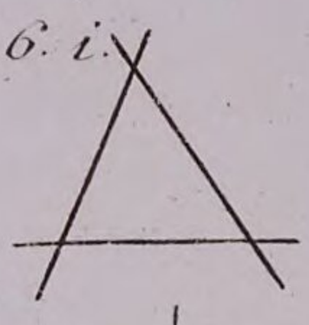
6.g.



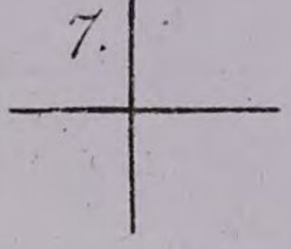
6.h.



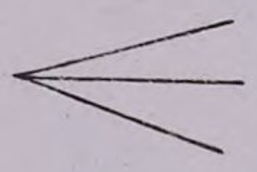
6.i.



7.



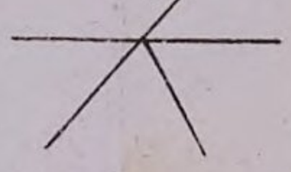
8.a.



8.b.

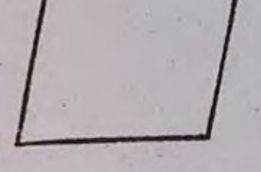
8.c.

8.d.

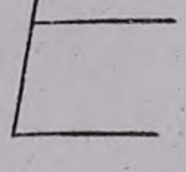


8.e.

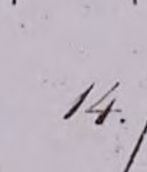
9.a.



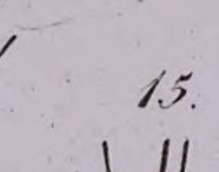
9.b.



9.c.

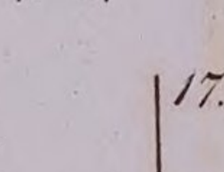


9.d.

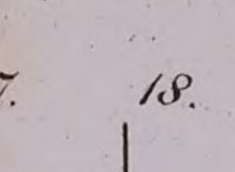


9.e.

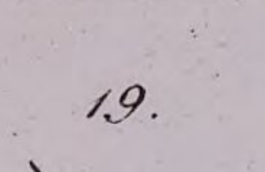
9.f.



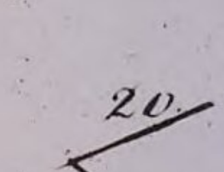
10.



11.



12.



13.

14.

15.

16.

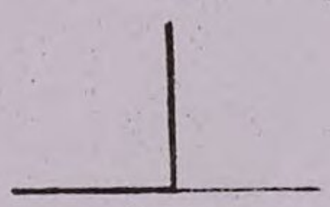
17.

18.

19.

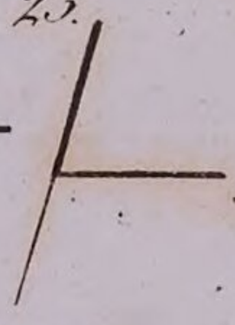
20.

21.



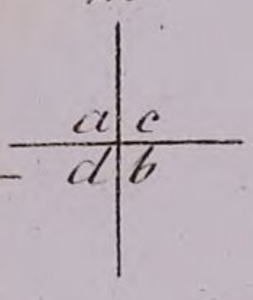
22.

23.

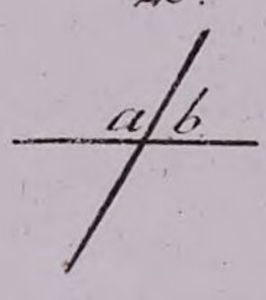


24.

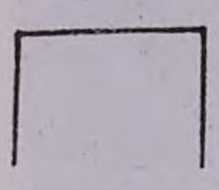
25.



26.

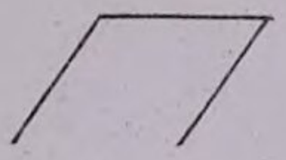


27.a.

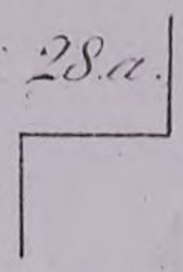


F. Ouimpel. sc.

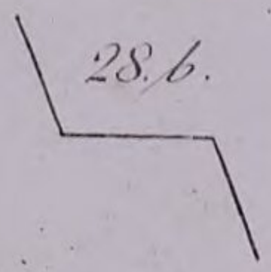
27 b



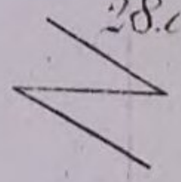
28. a.



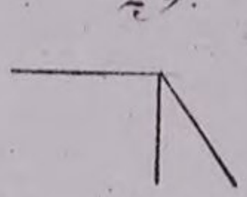
28. b.



28. c.

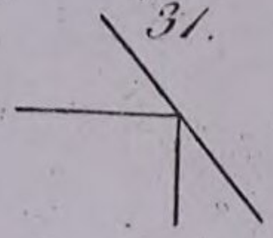


29.

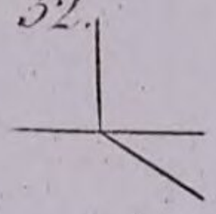


30.

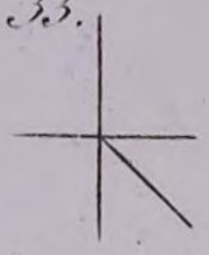
31.



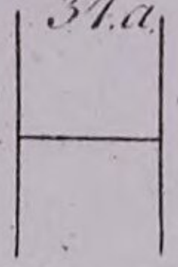
32.



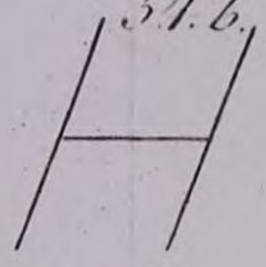
33.



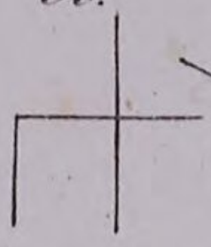
34. a.



34. b.

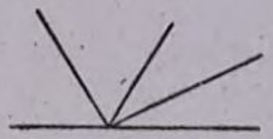


35.

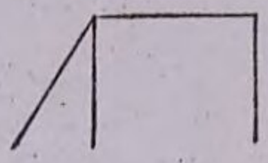


36.

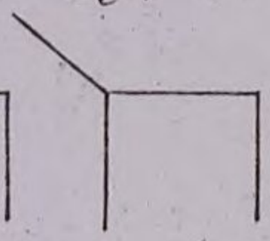
37.



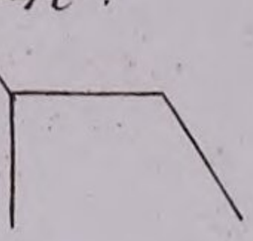
38.



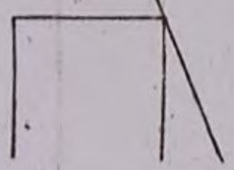
39.



40.

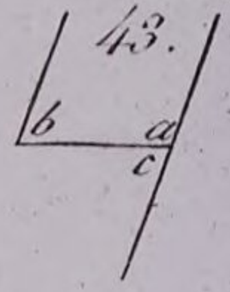


41.

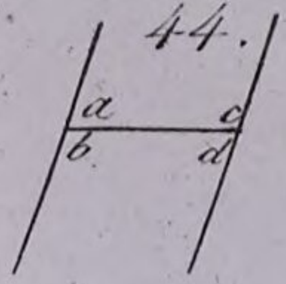


42.

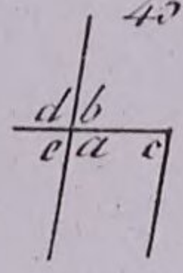
43.



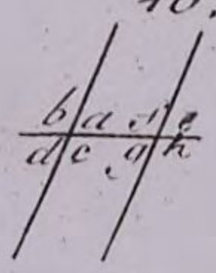
44.



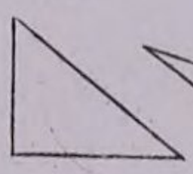
45.



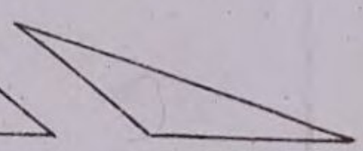
46.



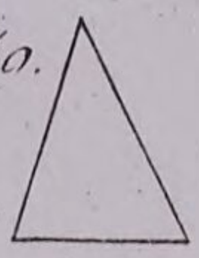
47.



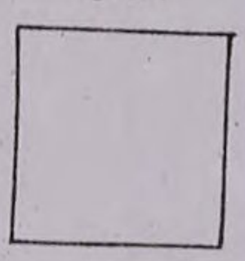
48.



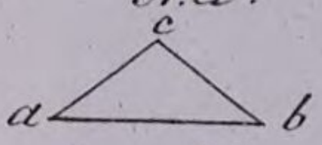
49.



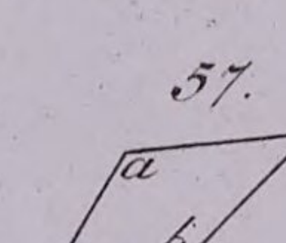
50.



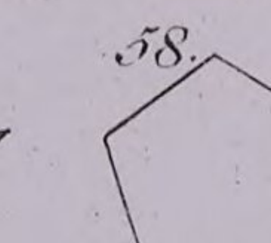
51. a.



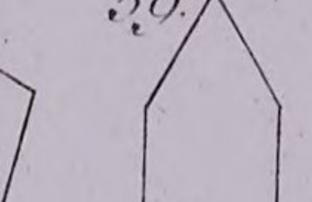
51. b. f



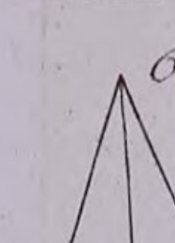
51. c. f



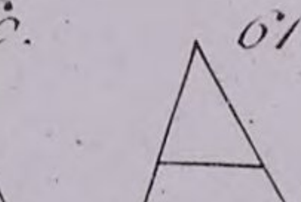
52.



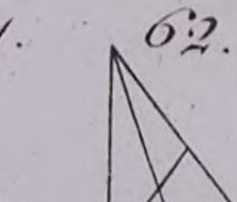
53.



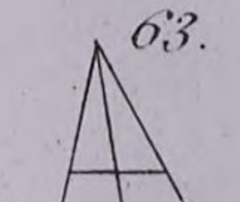
55.



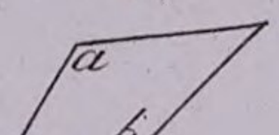
56.



54.



57.



58.

59.

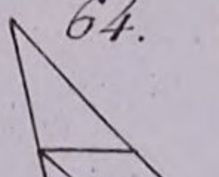
60.

61.

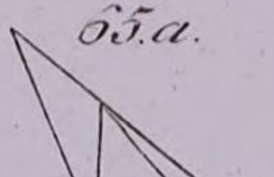
62.

63.

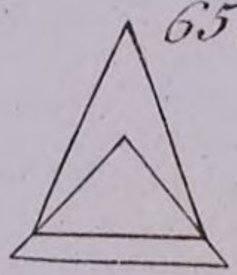
64.



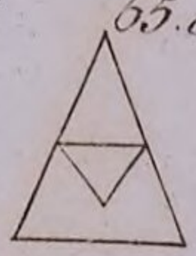
65. a.



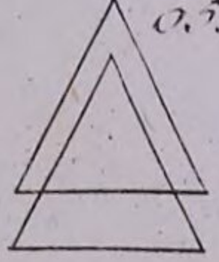
65 b



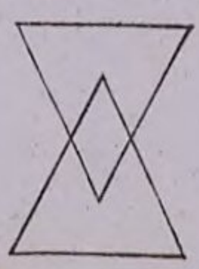
65. c



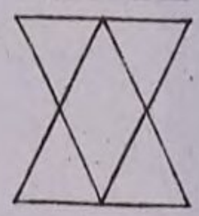
65. d.



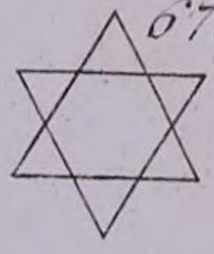
65. e.



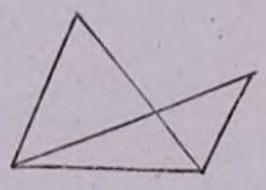
66.



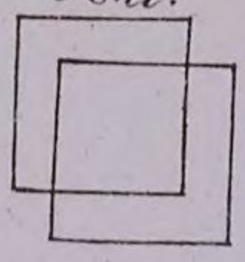
67. a.



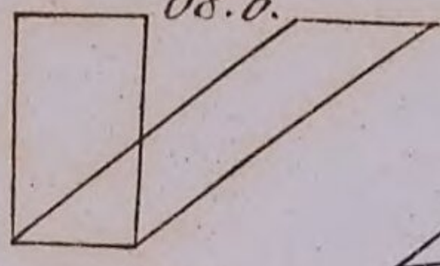
67. b.



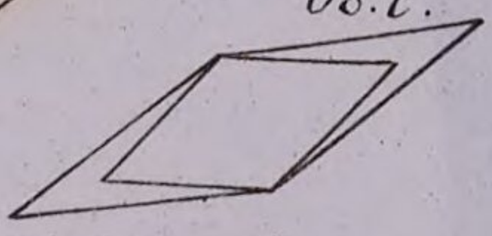
68. a.



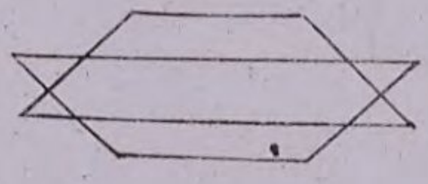
68. b.



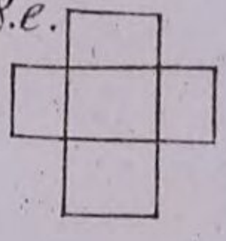
68. c.



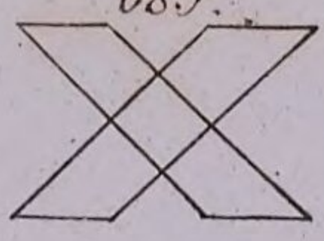
68. d.



68. e.

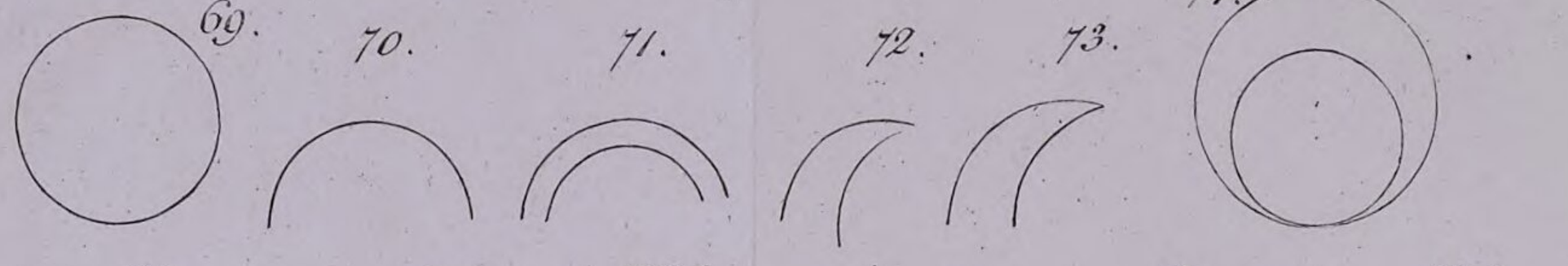


68. f.

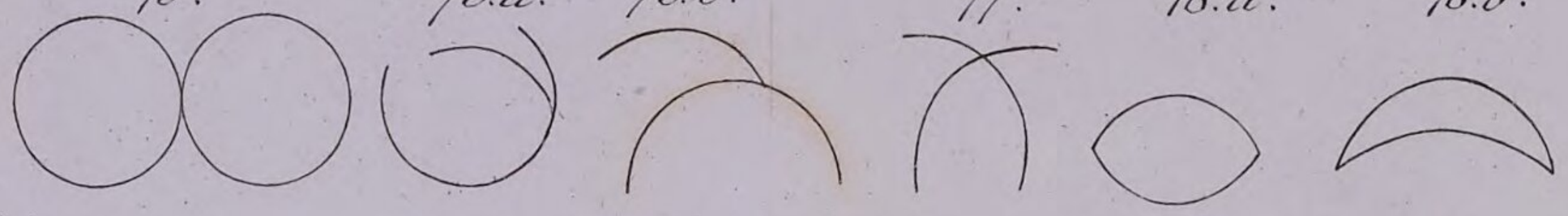


68. g.

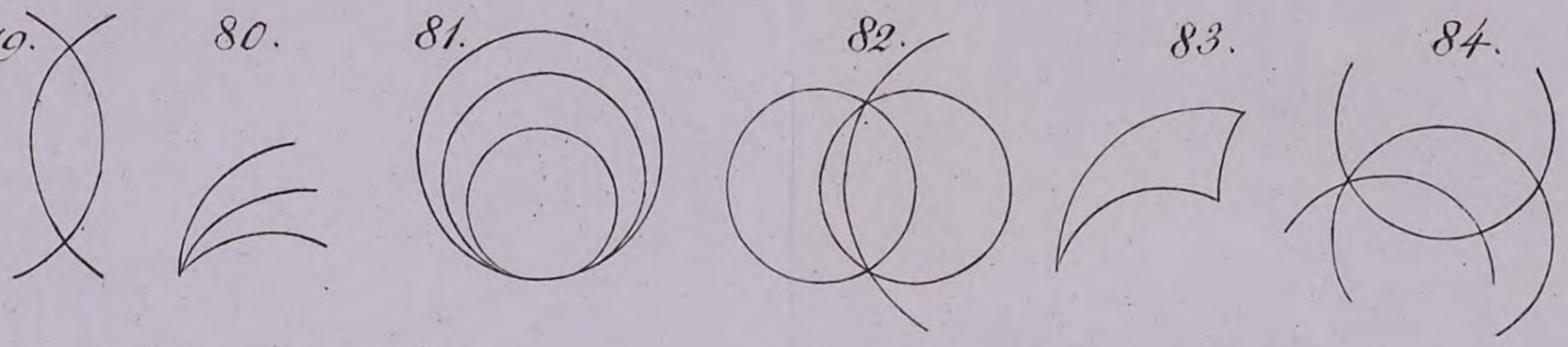
69. 70. 71. 72. 73. 74.



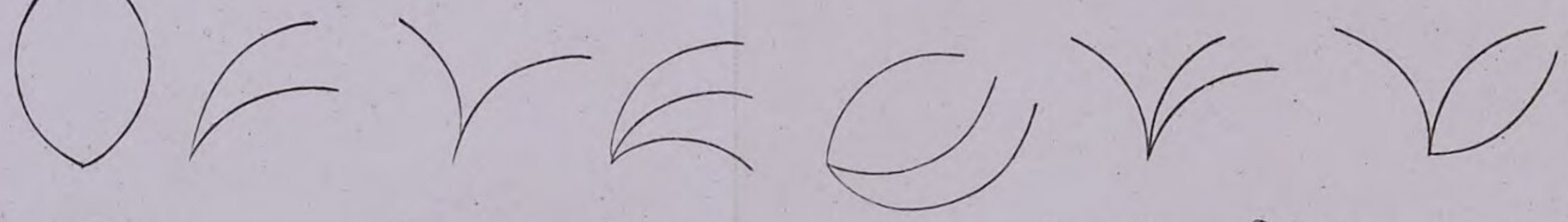
75. 76.a. 76.b. 77. 78.a. 78.b.



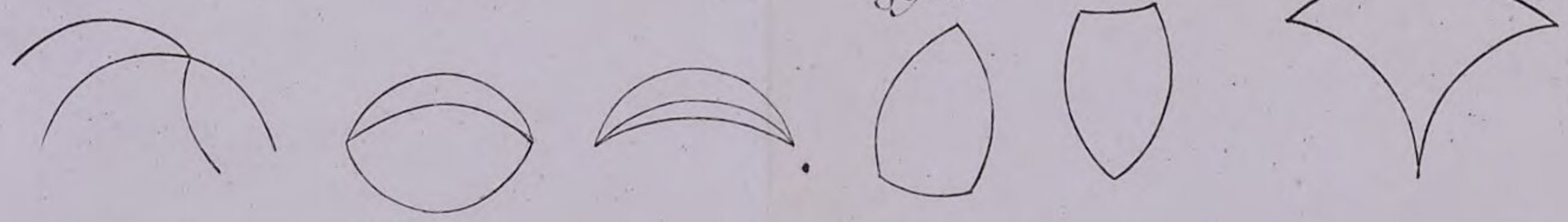
79. 80. 81. 82. 83. 84.



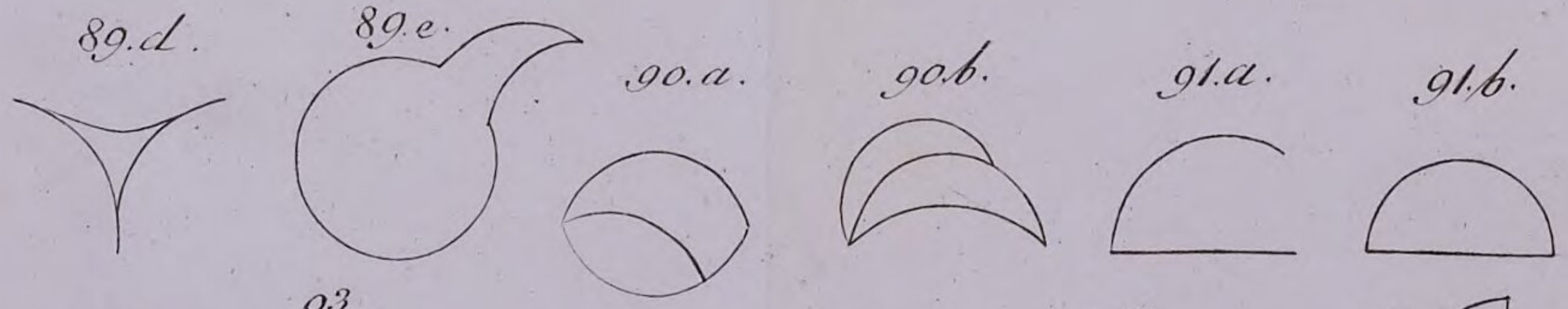
85.a. 85.c. 85.b. 86.a. 86.b. 86.c. 86.d.



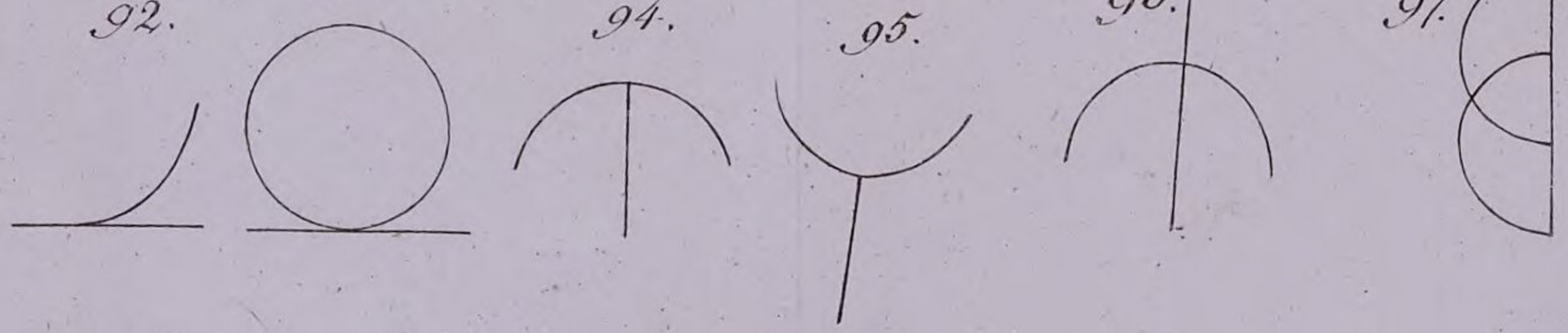
87. 88.a. 88.b. 89.a. 89.b. 89.c.



89.d. 89.e. 90.a. 90.b. 91.a. 91.b.



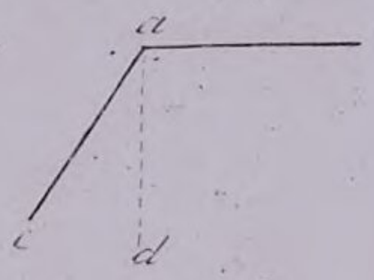
92. 93. 94. 95. 96. 97.



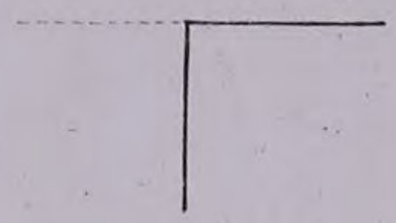
1.

2.

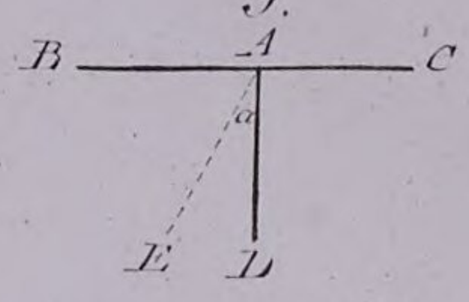
3.



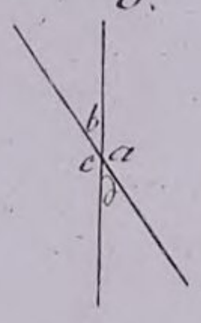
4.



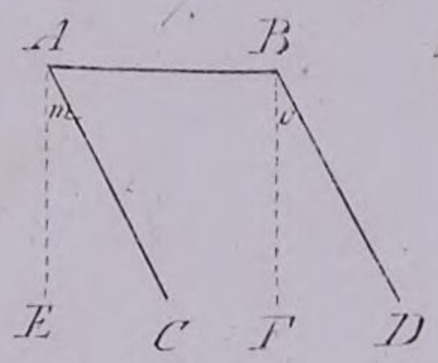
5.



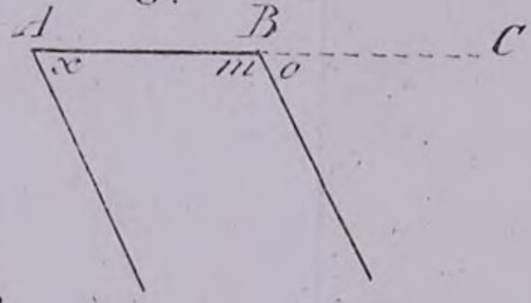
6.



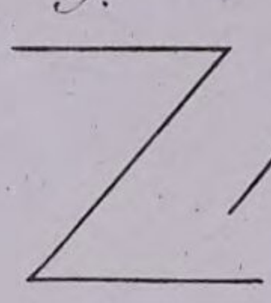
7.



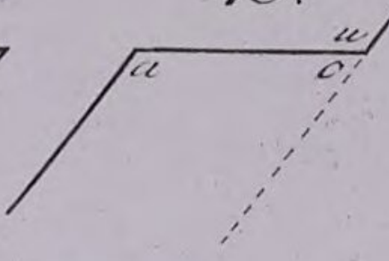
8.



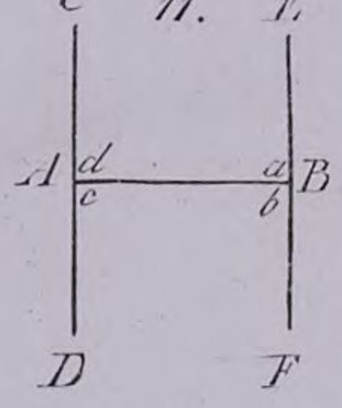
9.



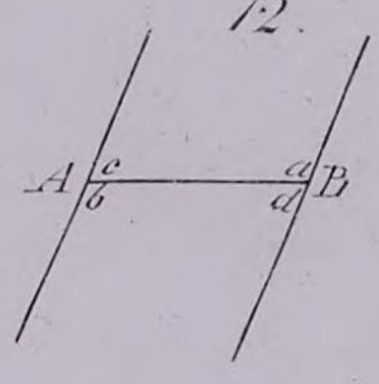
10.



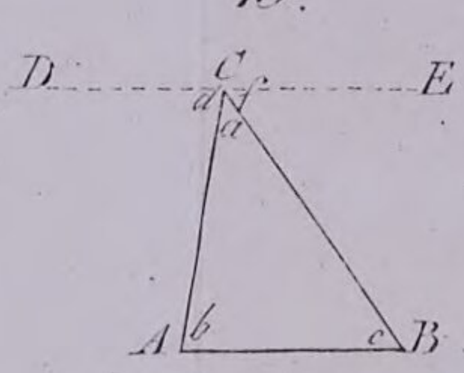
C 11. E



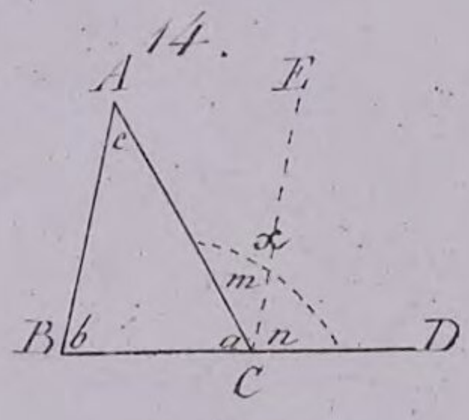
12.



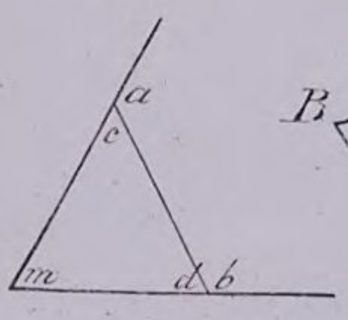
13.



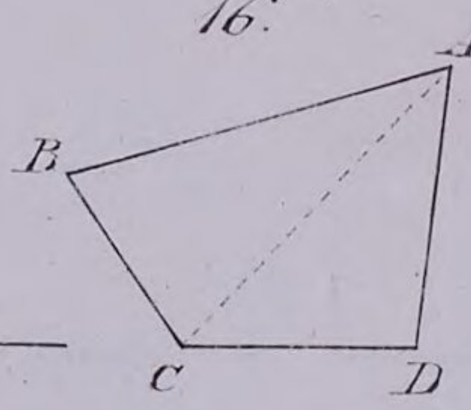
14.



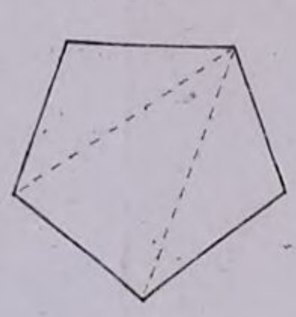
15.



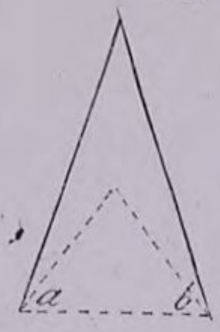
16.



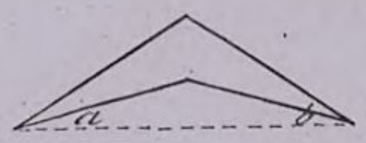
17.



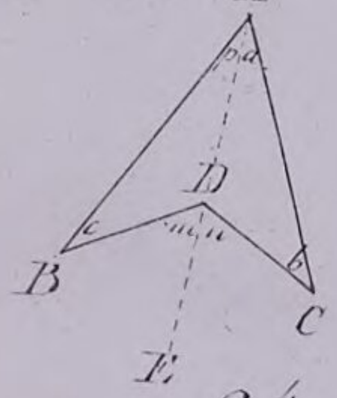
18.



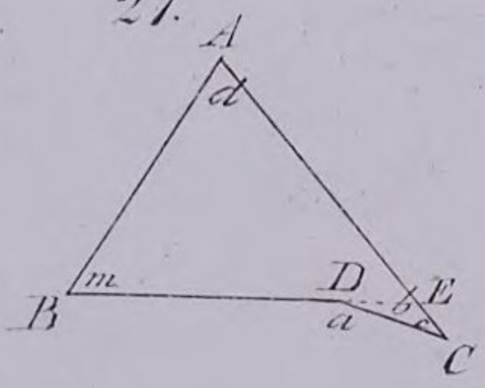
19.



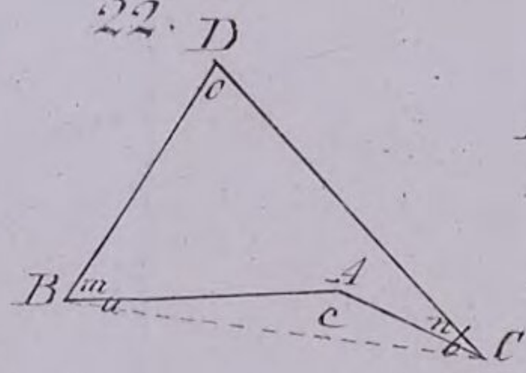
20. A



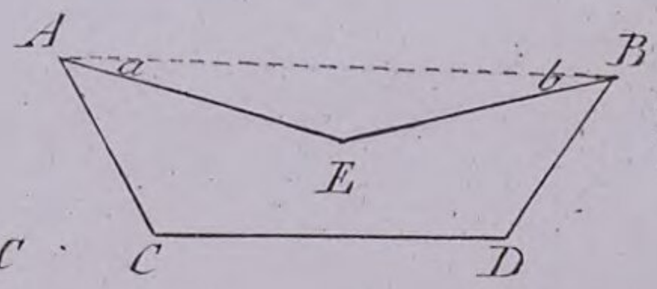
21.



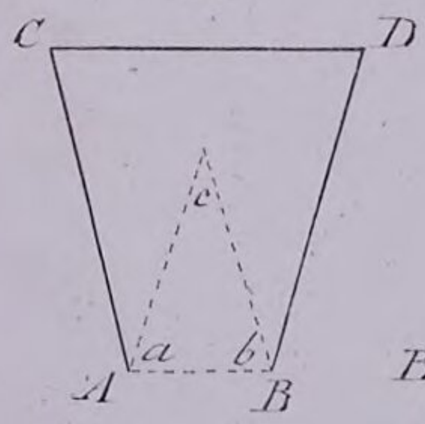
22. D



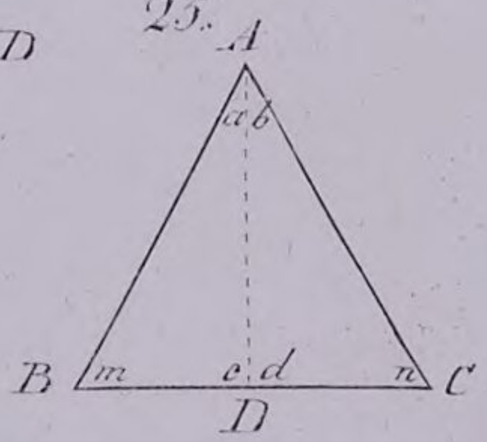
23.



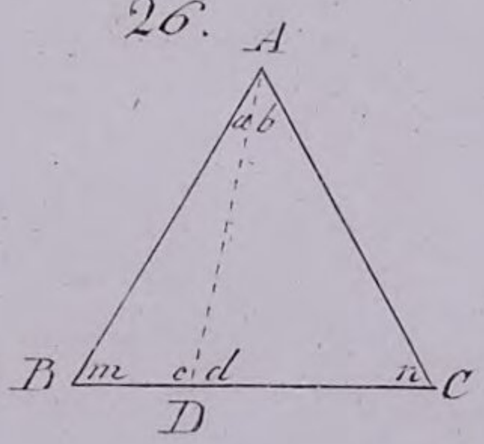
24.



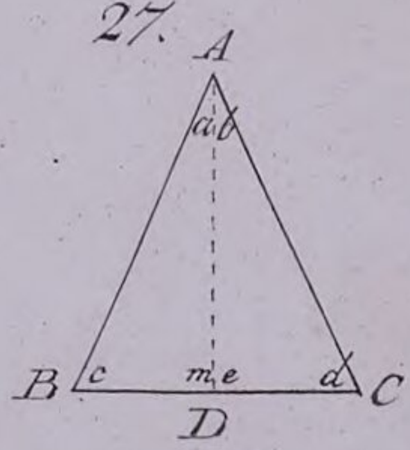
25. A



26. A

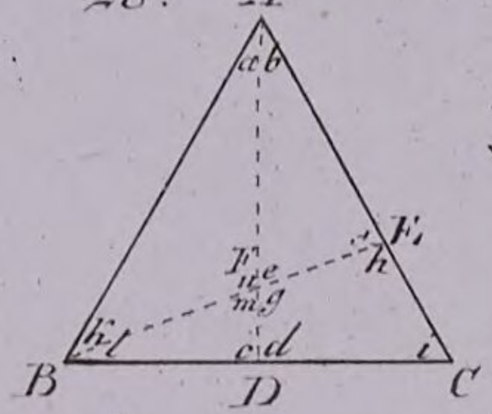


27. A

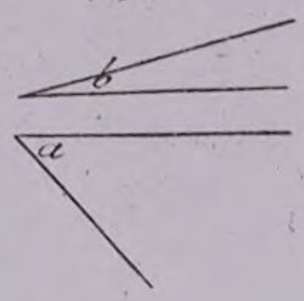


F. Guimpel. fc:

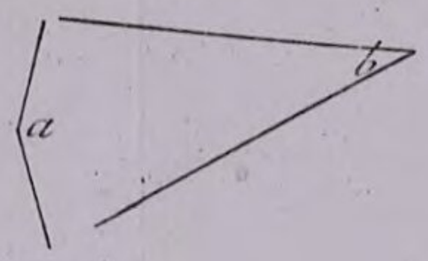
28.



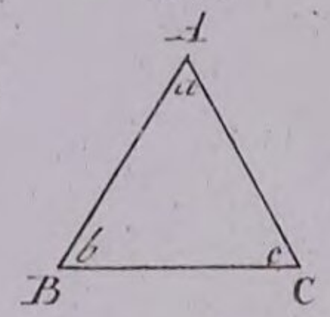
29.



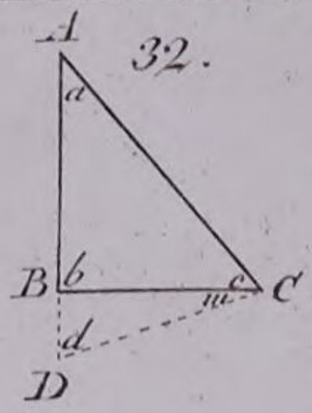
30.



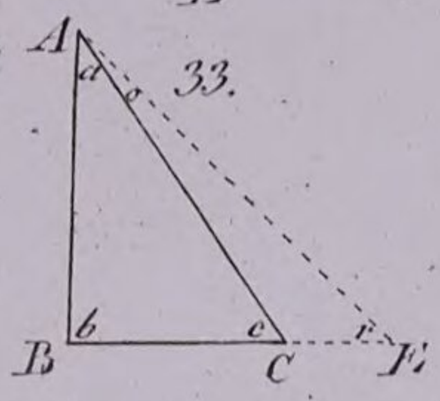
31.



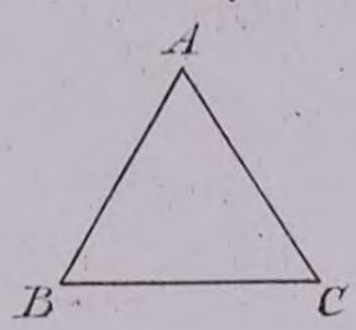
32.



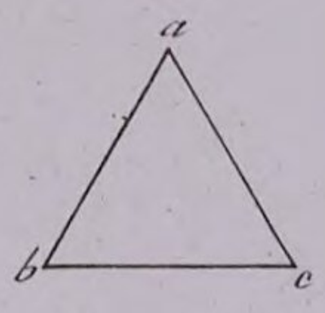
33.



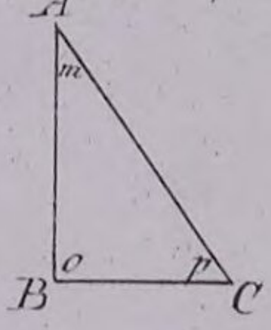
34.



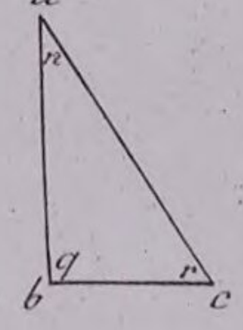
35.



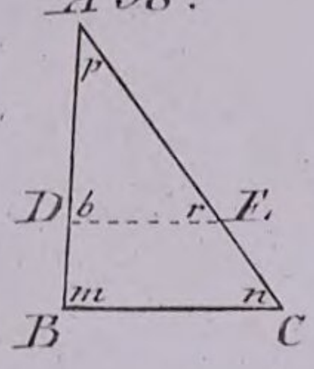
36.



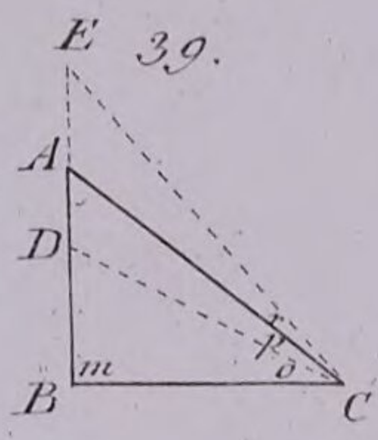
37.



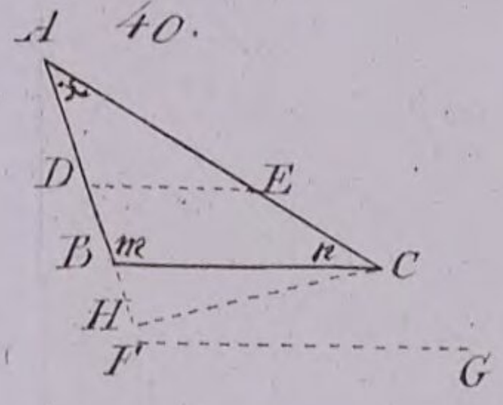
38.



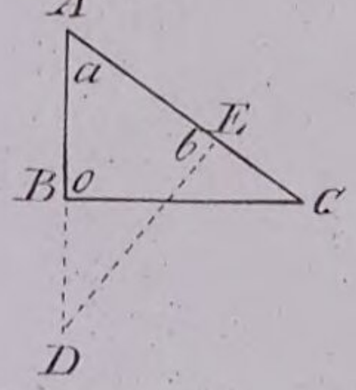
39.



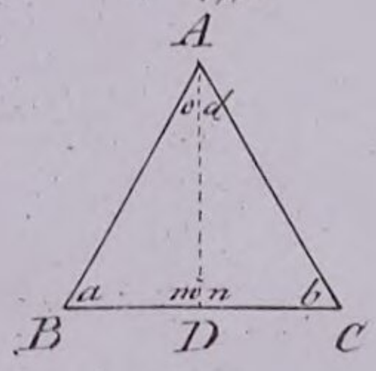
40.



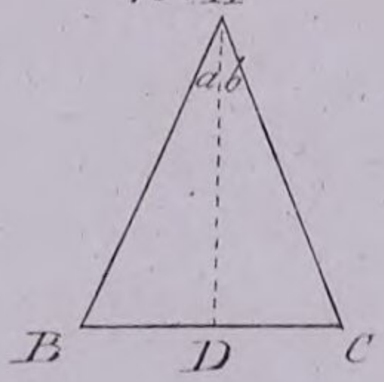
41.



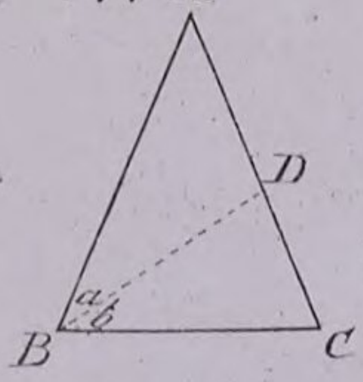
42.



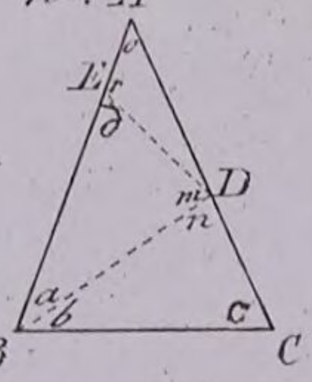
43.



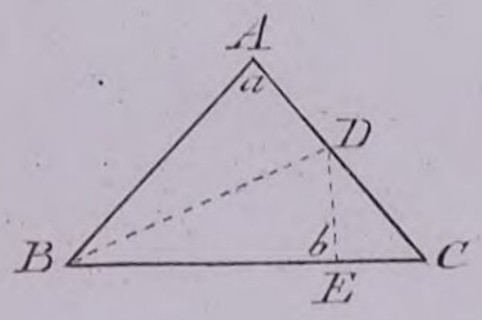
44.



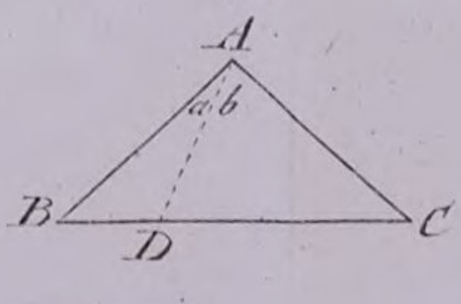
45.



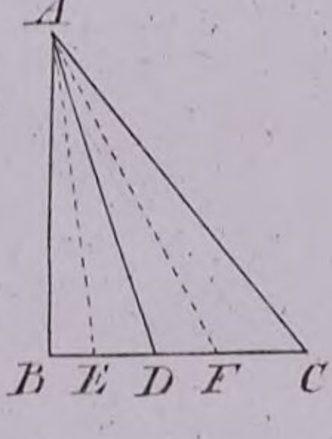
46.



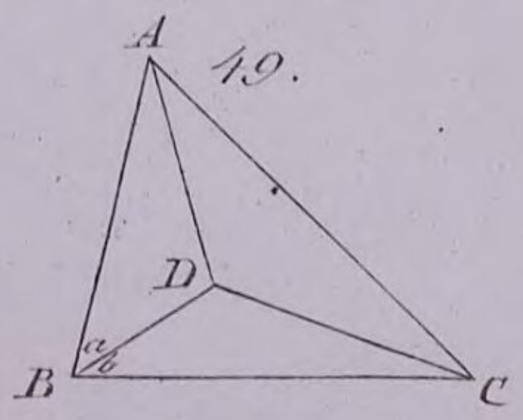
47.



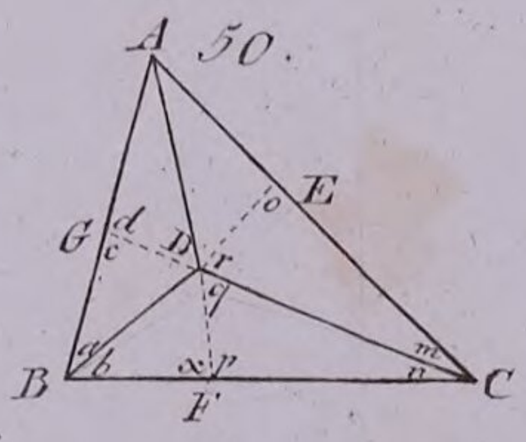
48.



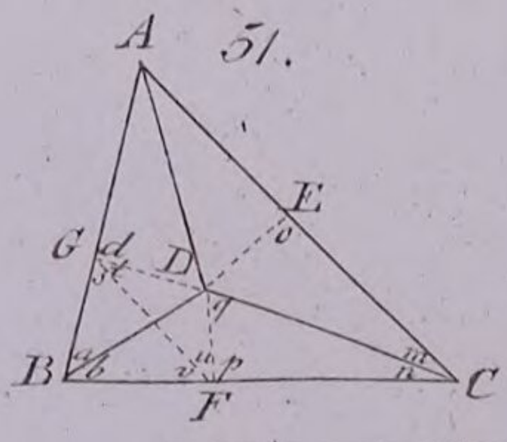
49.



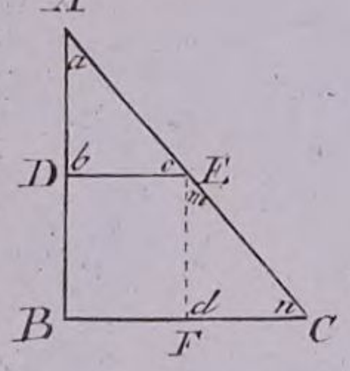
50.



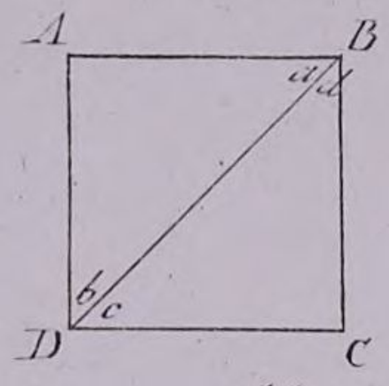
51.



52.

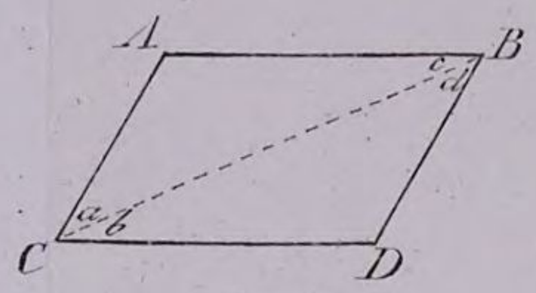


53.



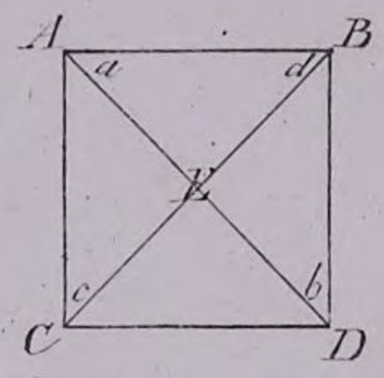
55. a

54. a.



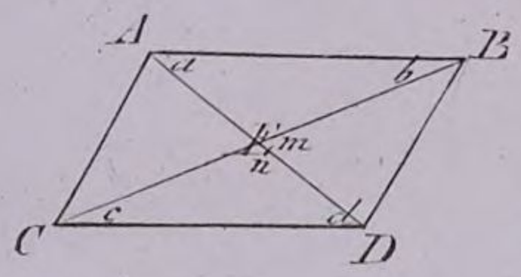
55. b

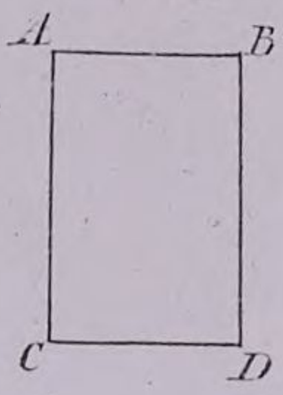
54. b.

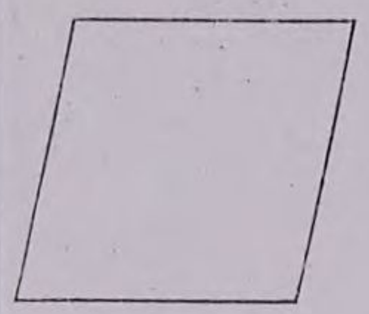


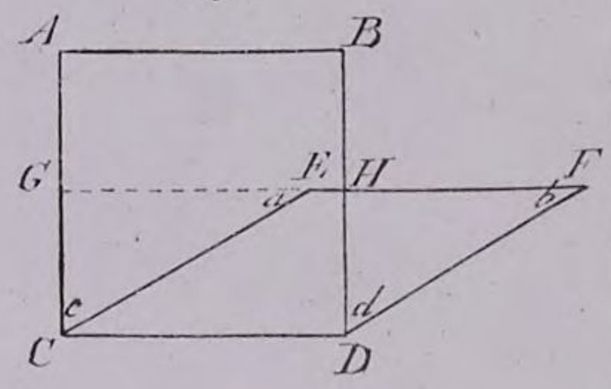
56.

54. c

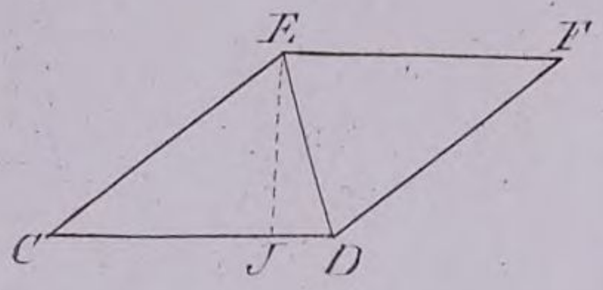




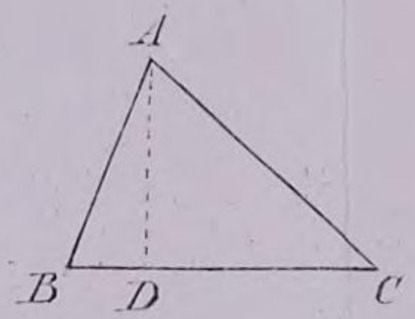




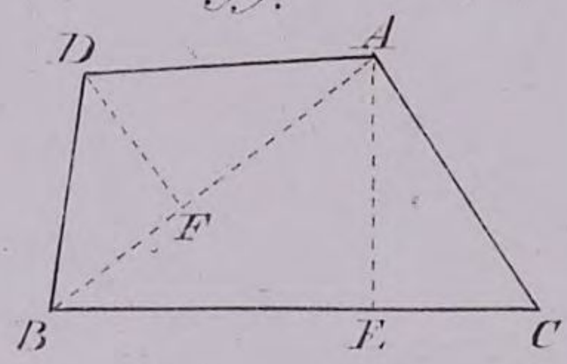
57.



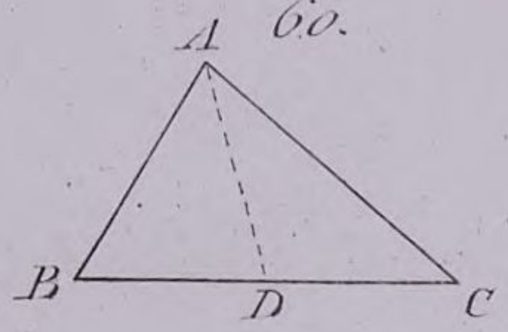
58.



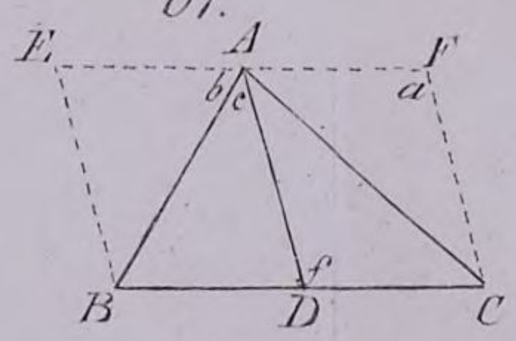
59.



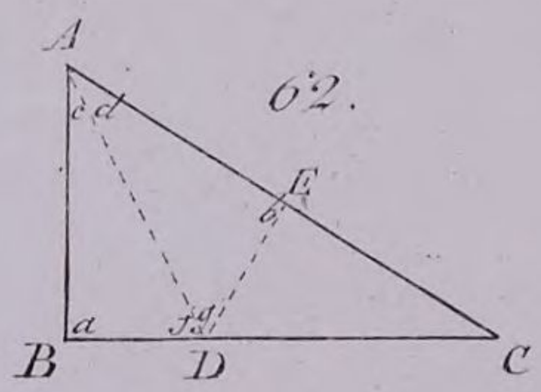
60.



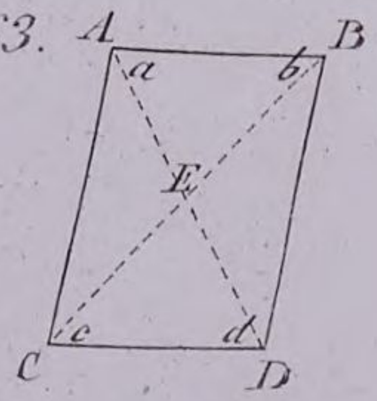
61.



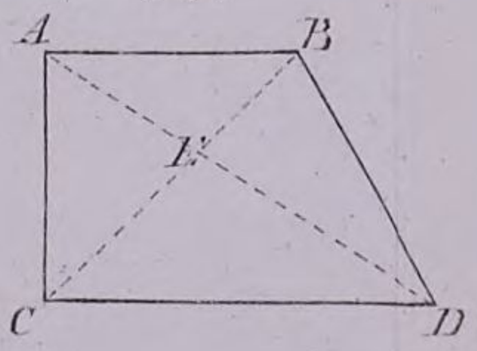
62.



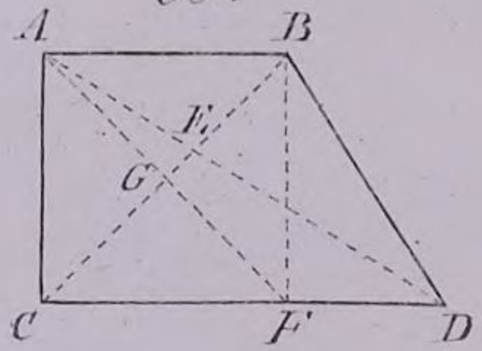
63.



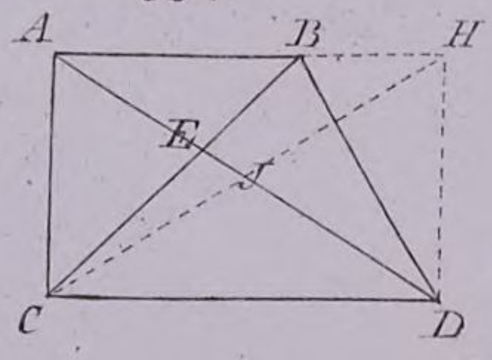
64.



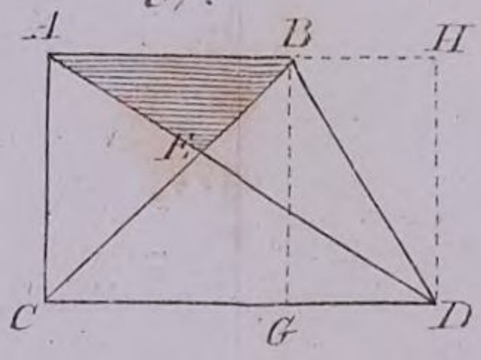
65.



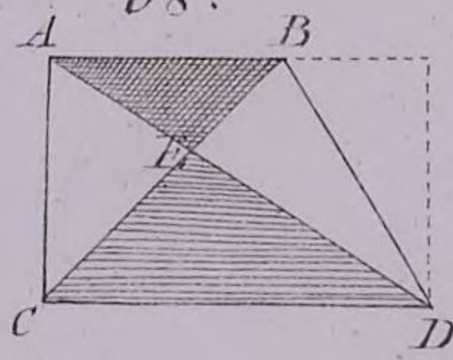
66.



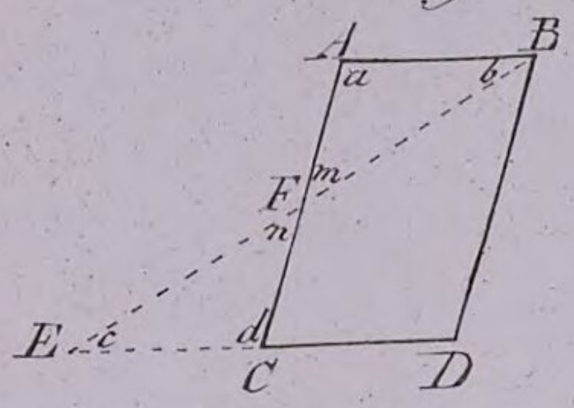
67.



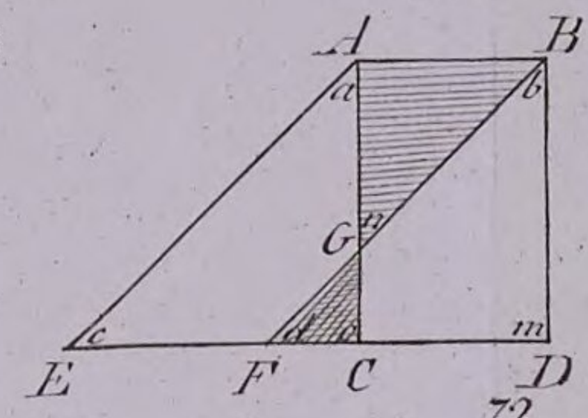
68.



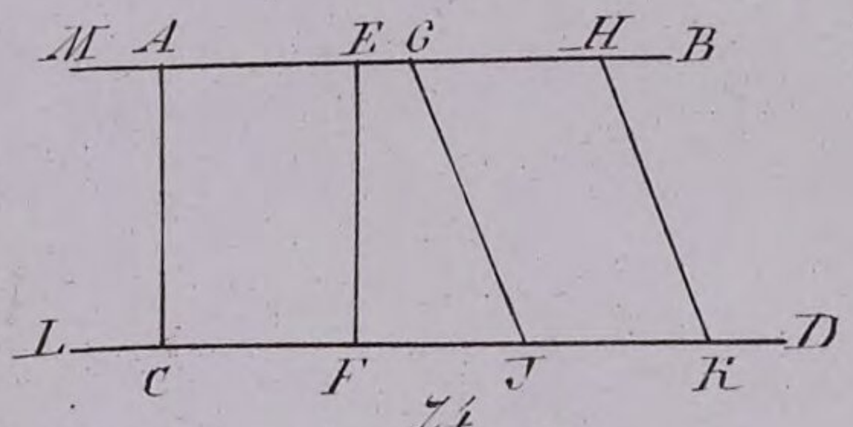
69.



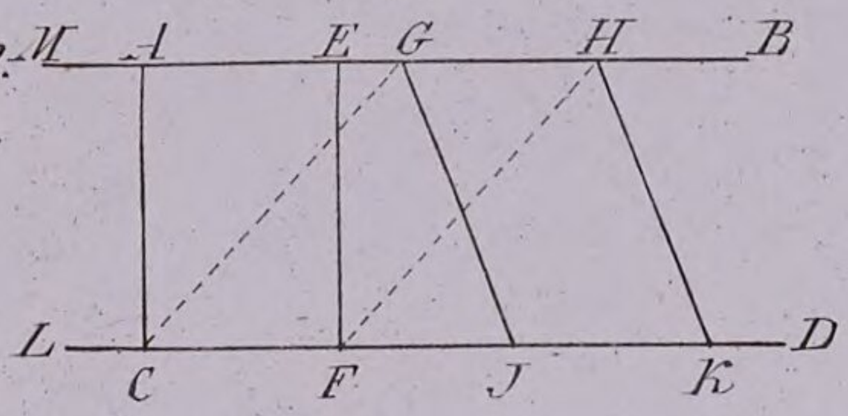
70.



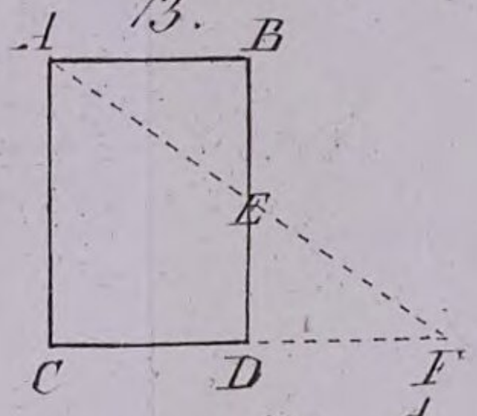
71.



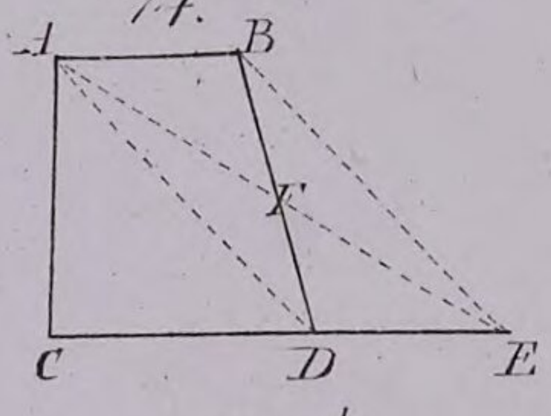
72.



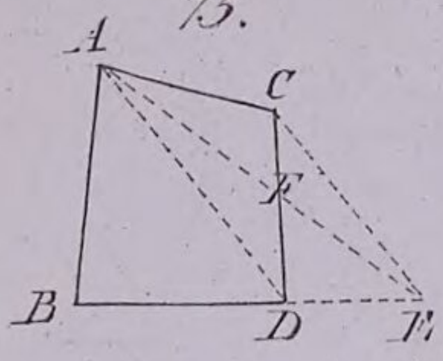
73.



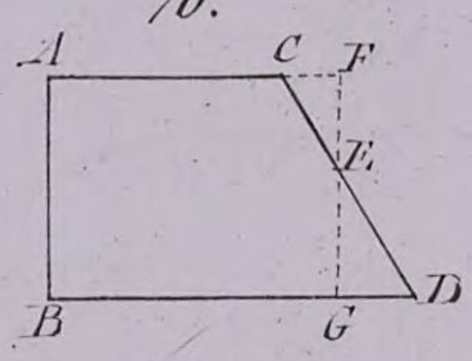
74.



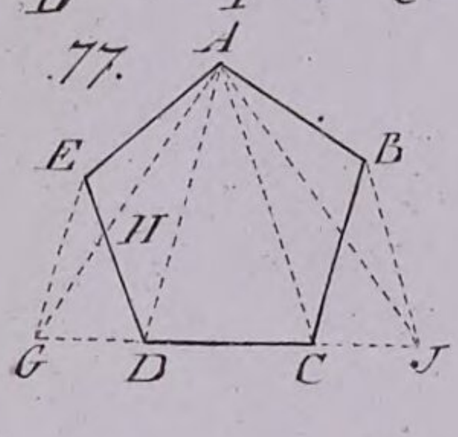
75.



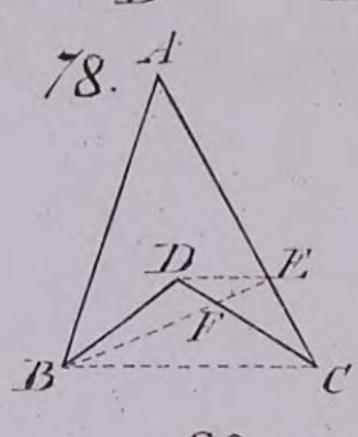
76.



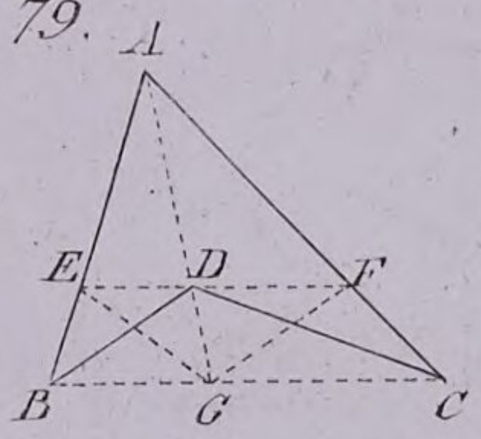
77.



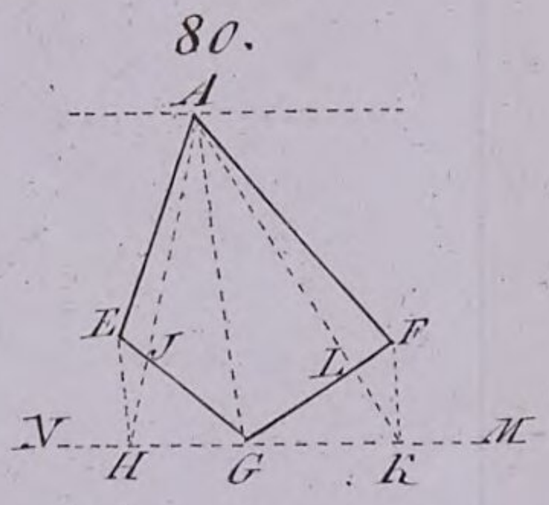
78.



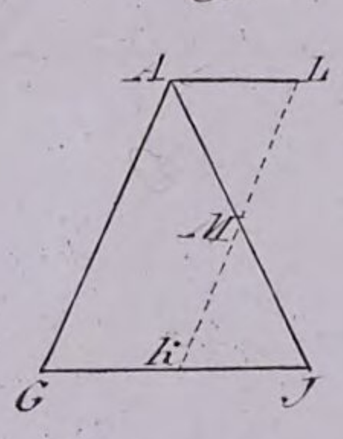
79.



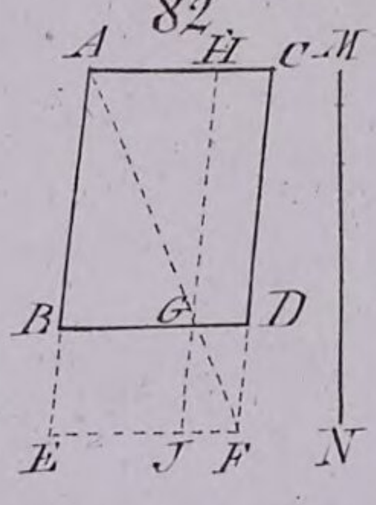
80.



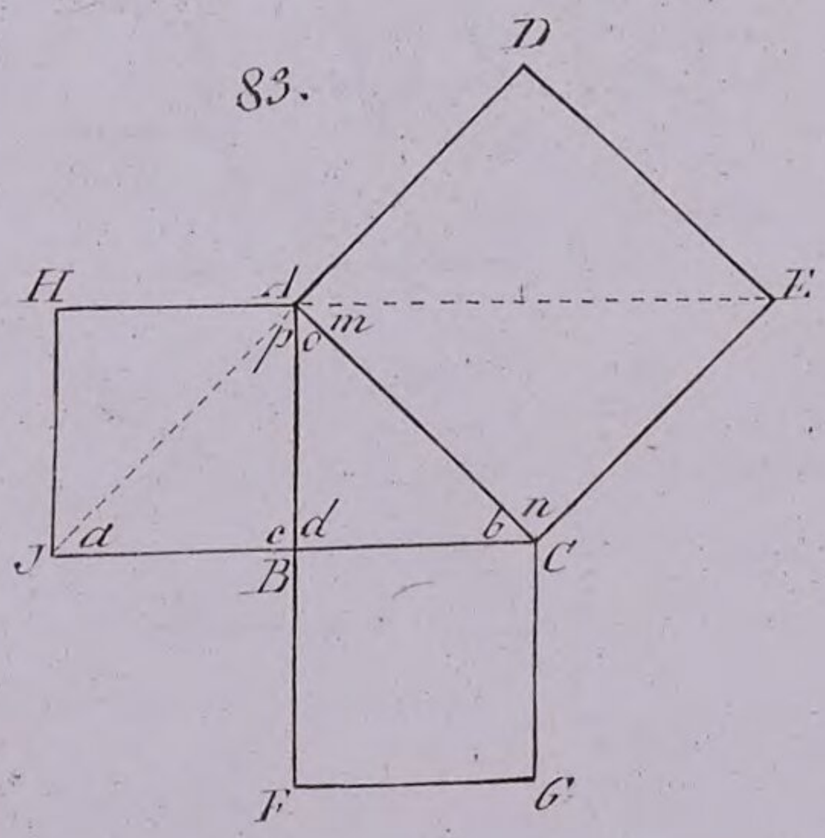
81.



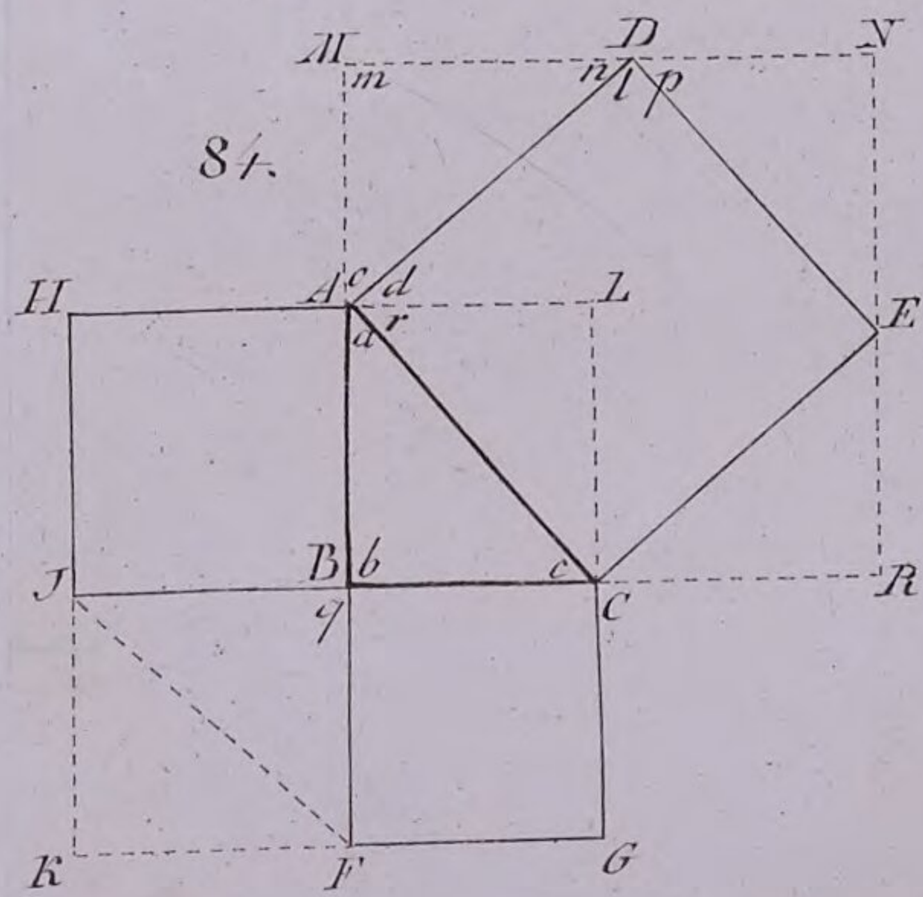
82.



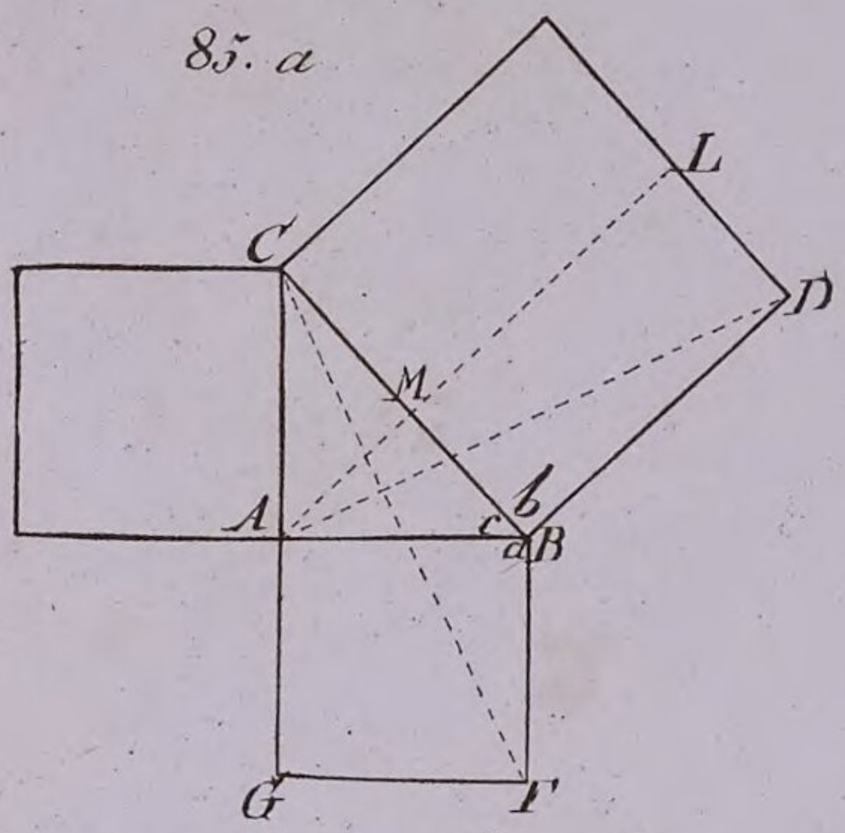
83.



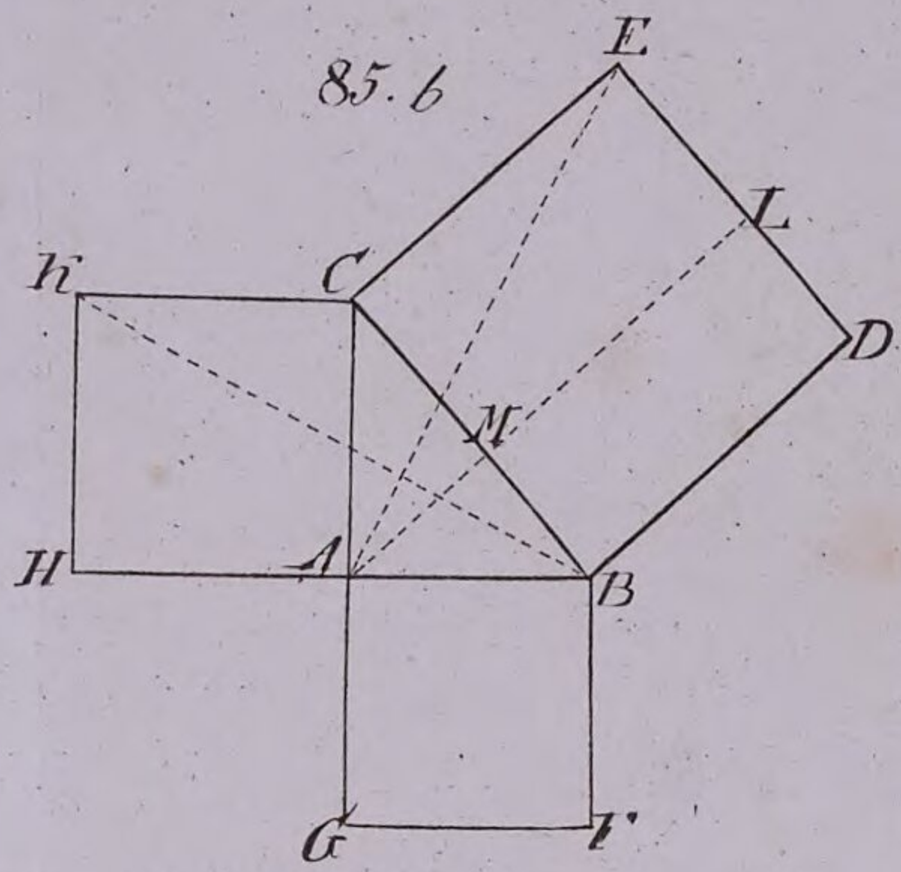
84.



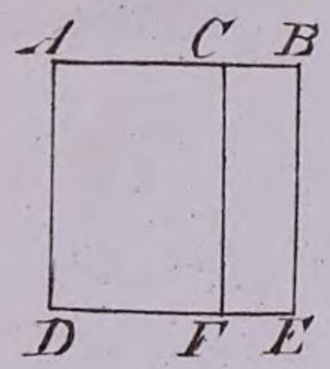
85. a



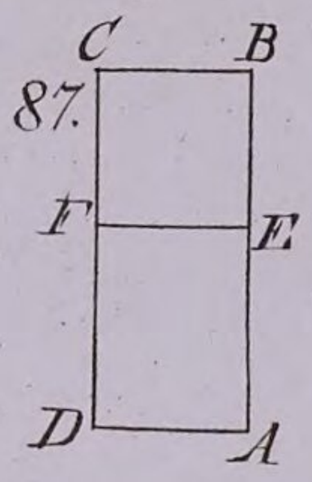
85. b



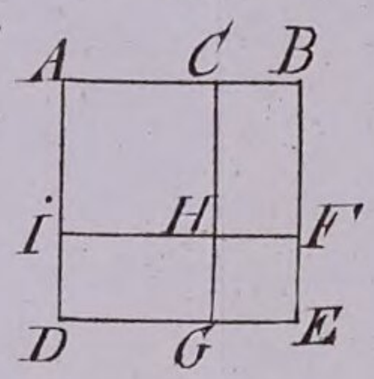
86.



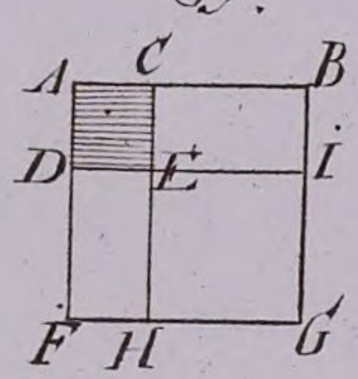
87.



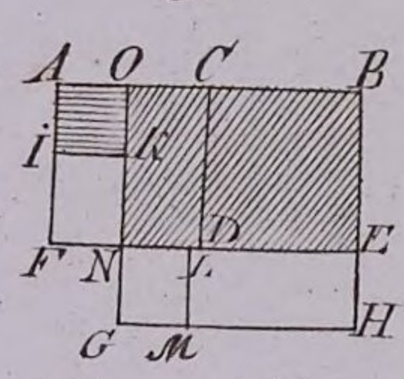
88.



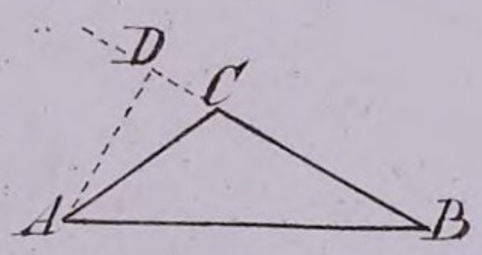
89.



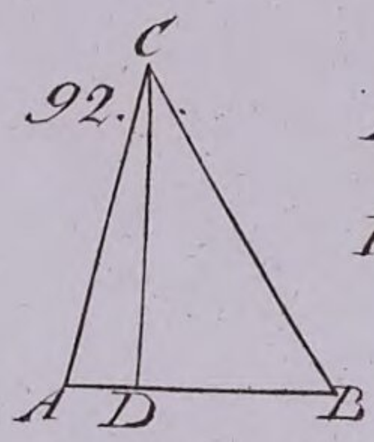
90.



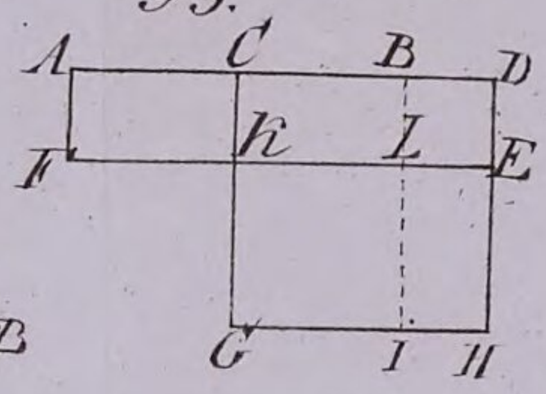
91.



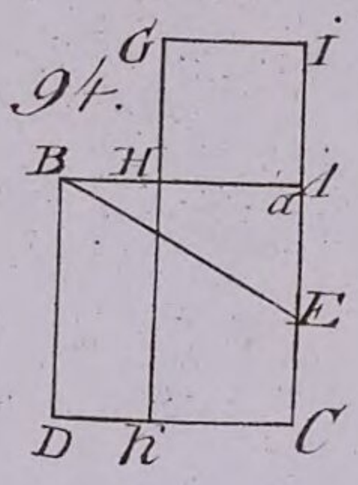
92.



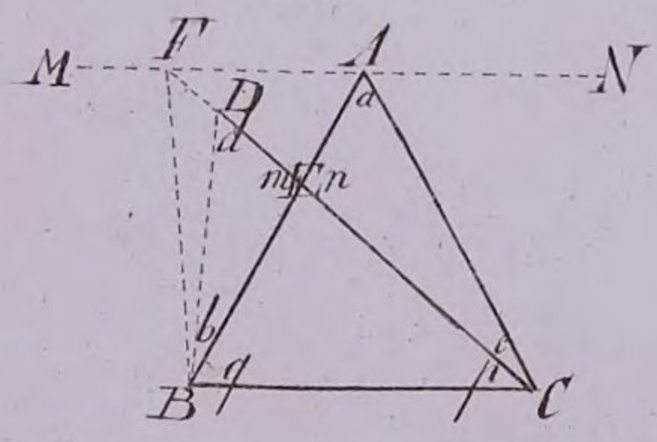
93.



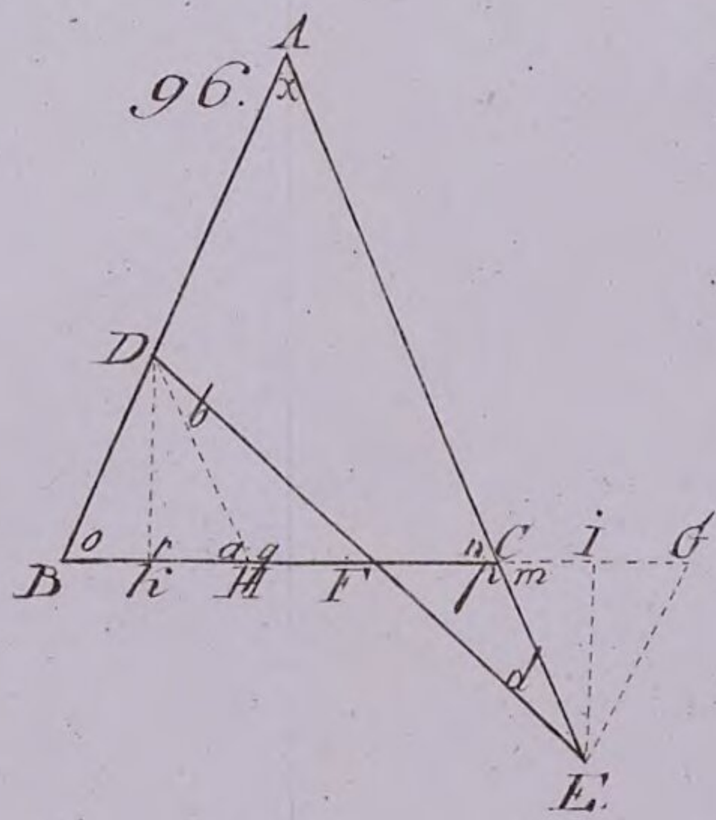
94.



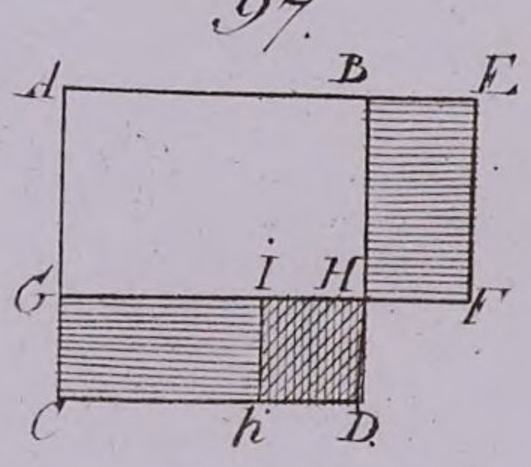
95.



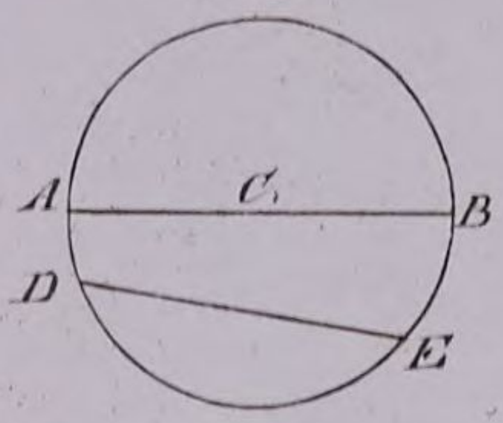
96.



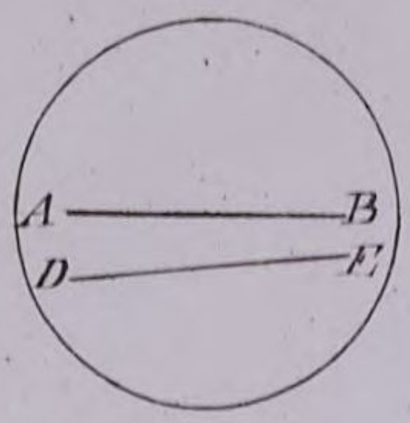
97.



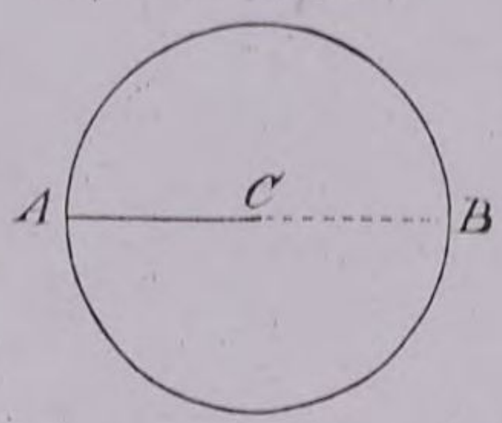
98.



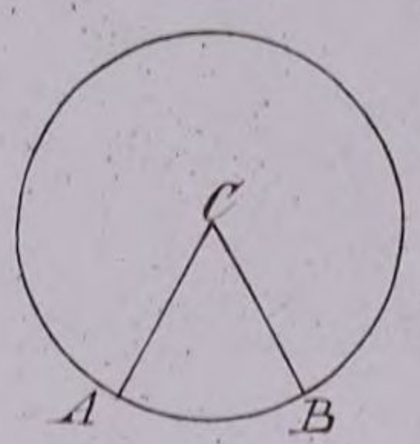
99.



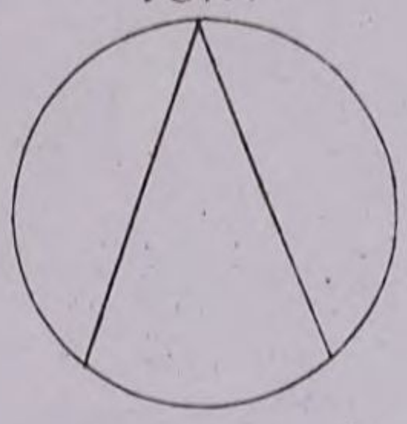
100.



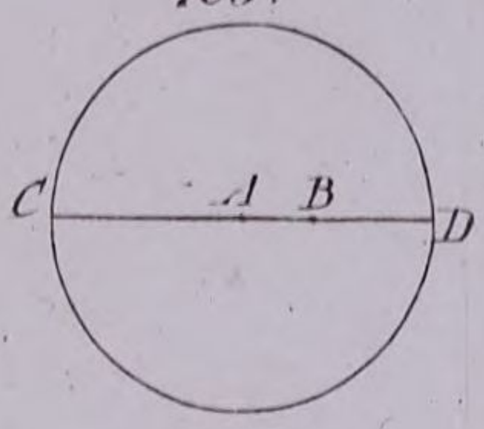
101.



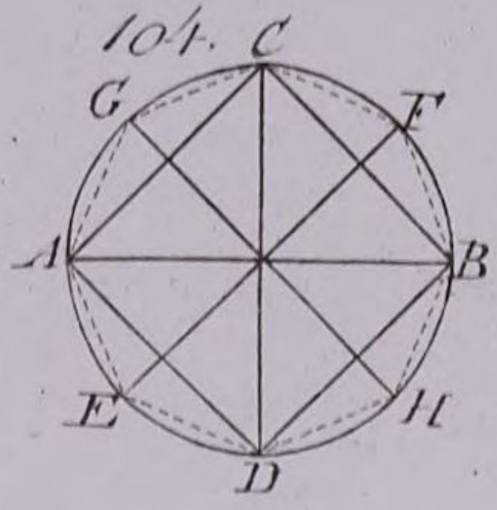
102.



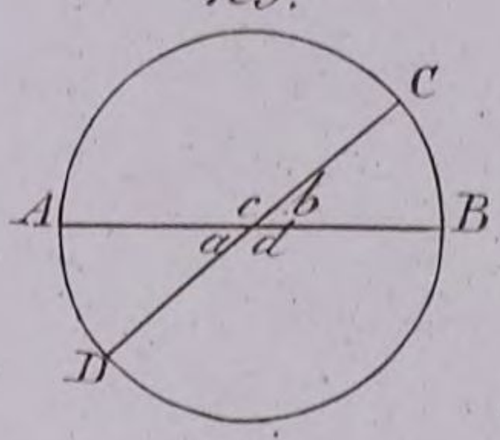
103.



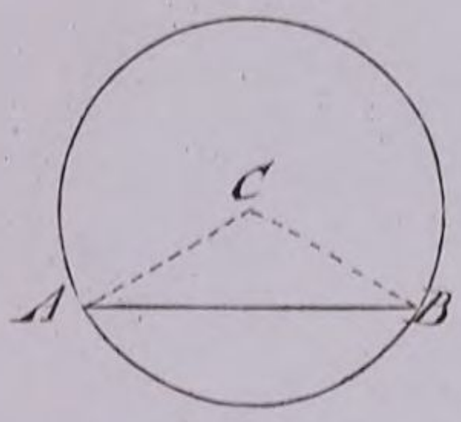
104.



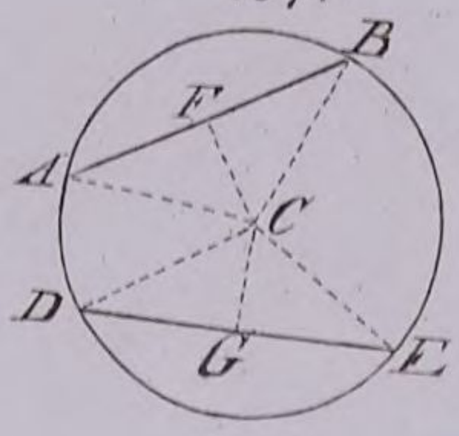
105.



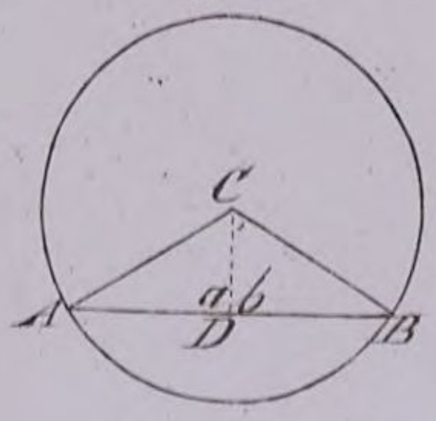
106.



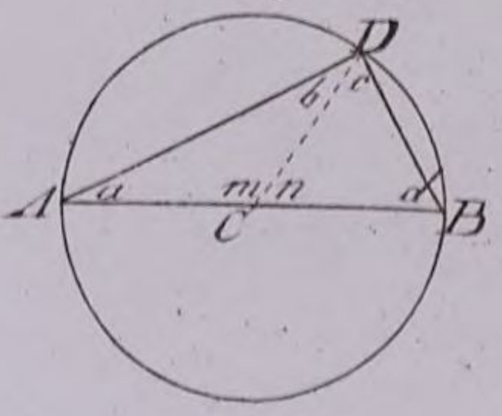
107.



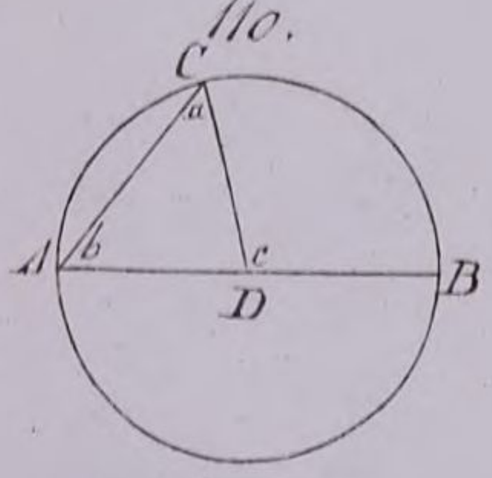
108.



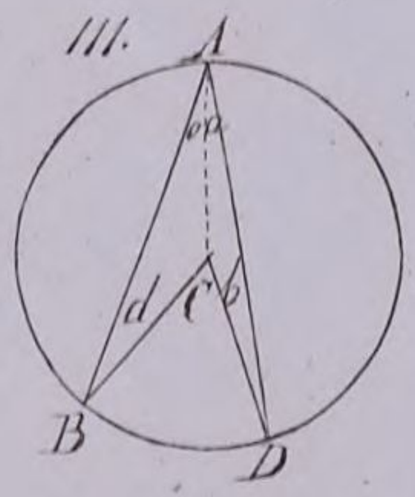
109.



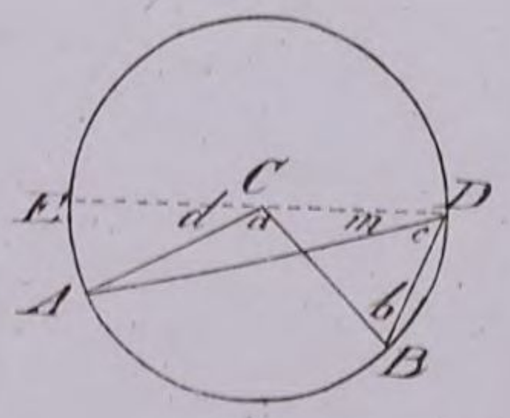
110.



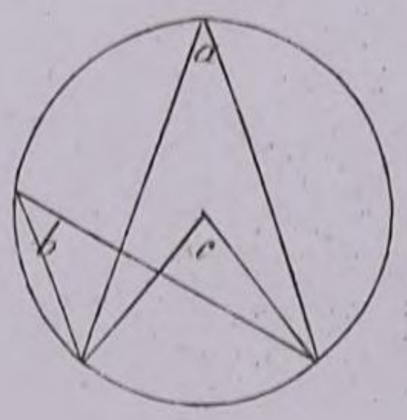
111.



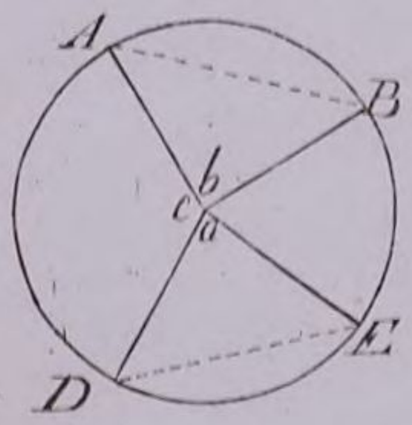
112.



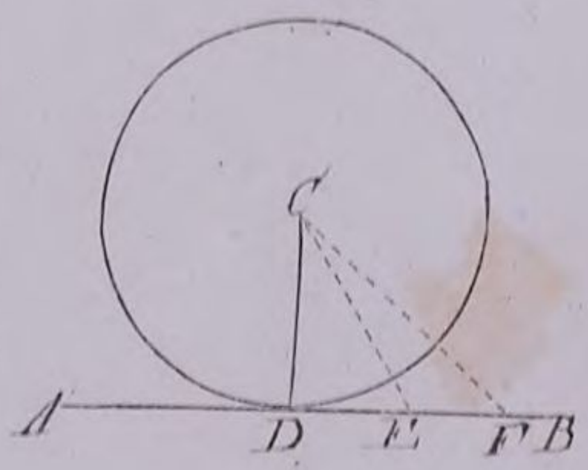
113.



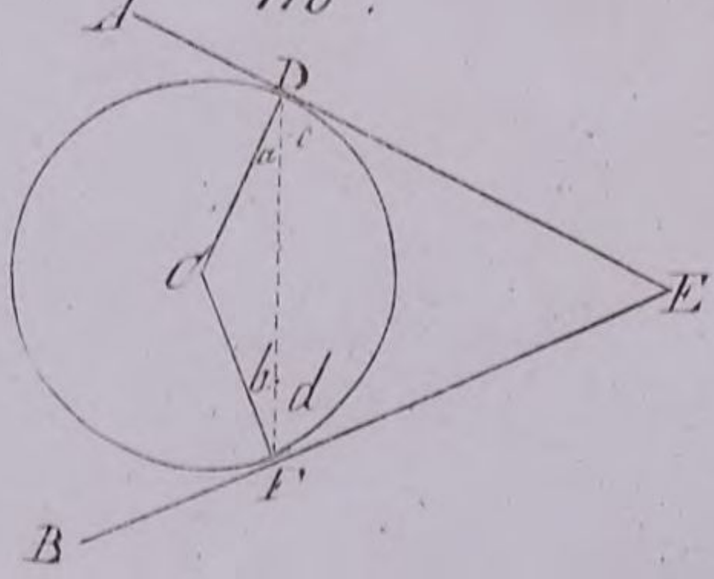
114.



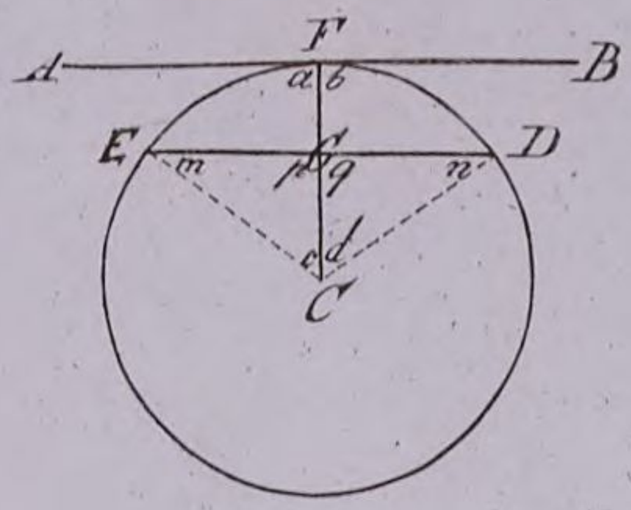
115.



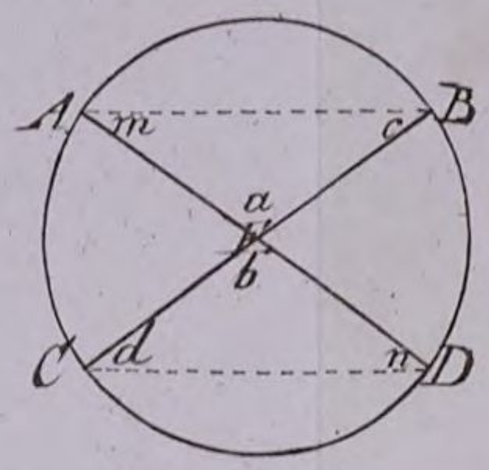
116.



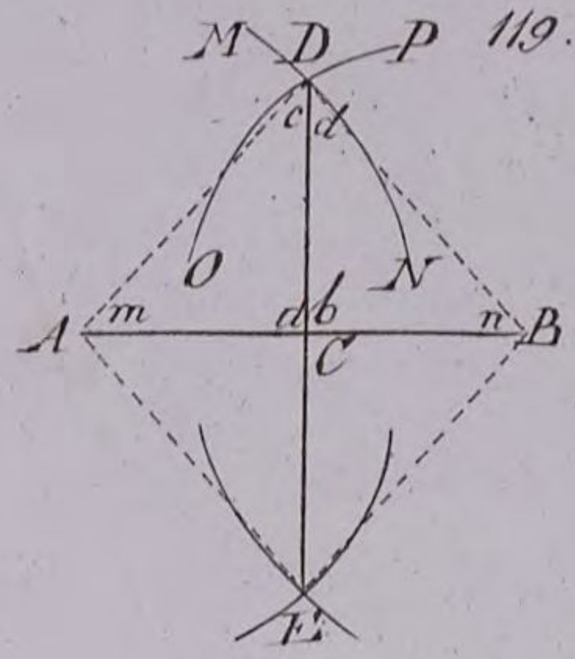
117.



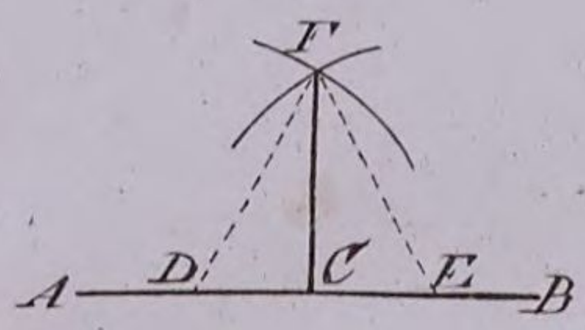
118.



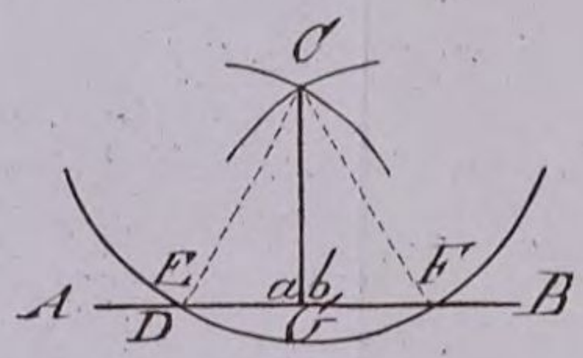
119.



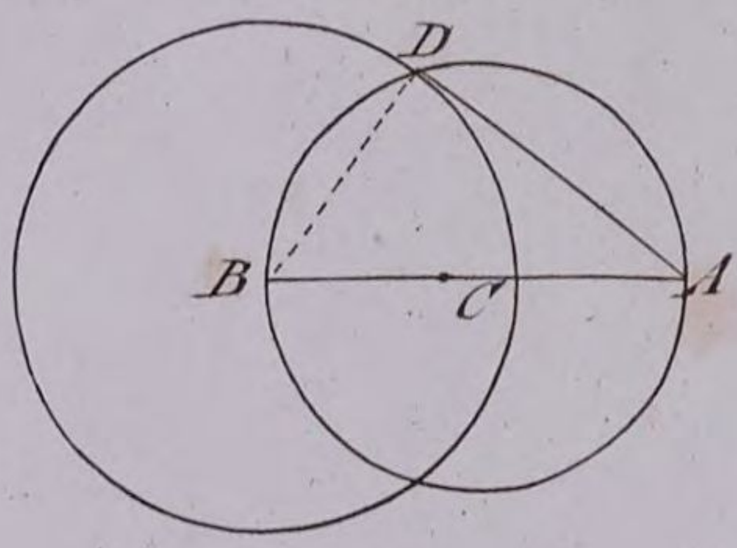
120.



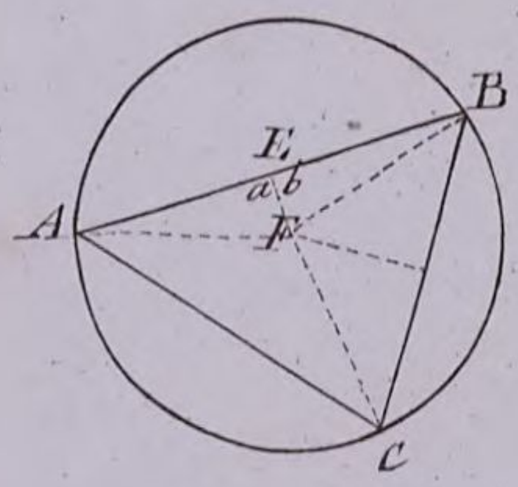
121.



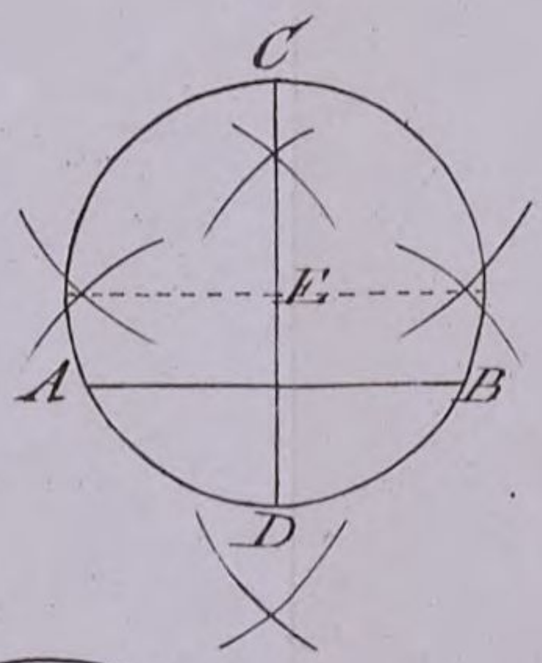
122.



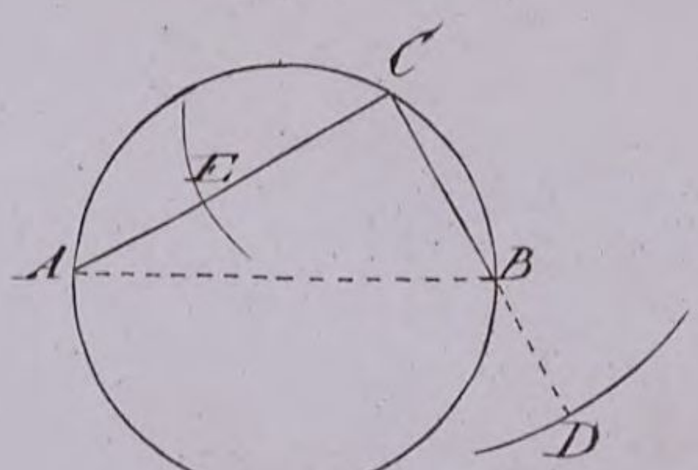
123.



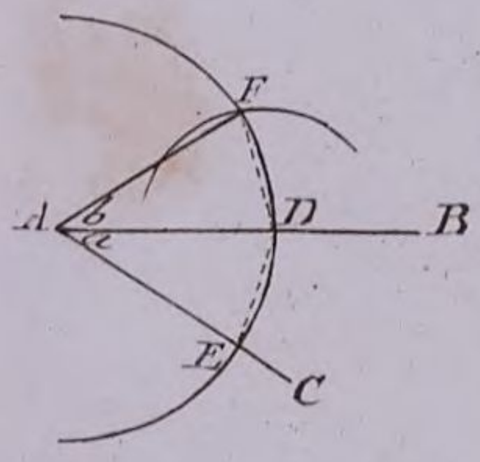
124.



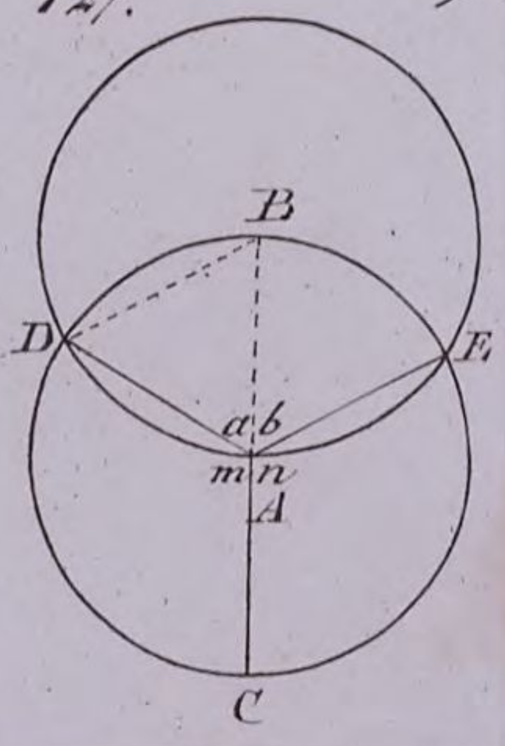
125.



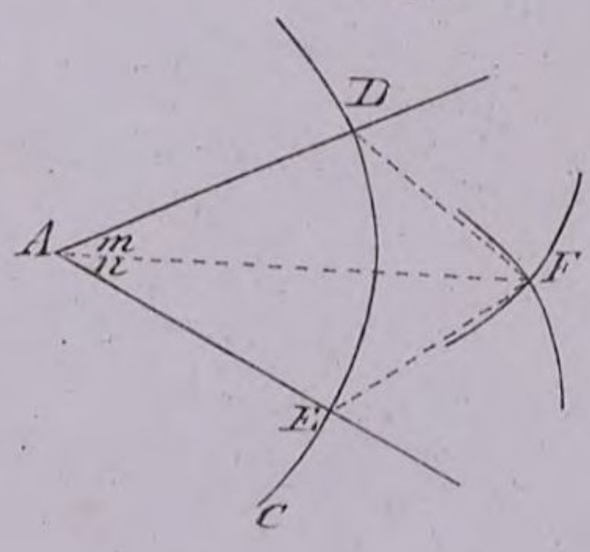
126.



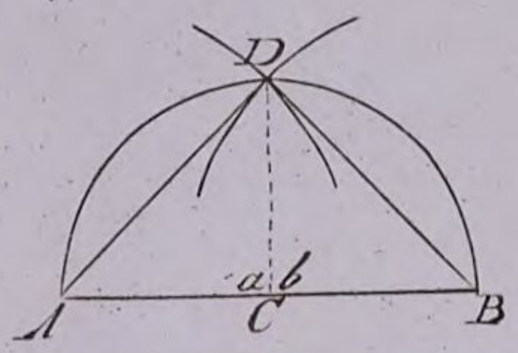
127.



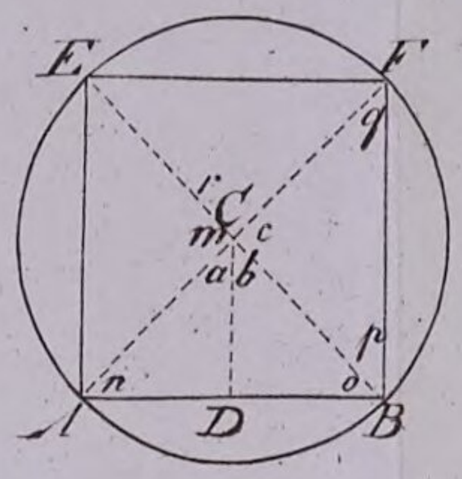
128.



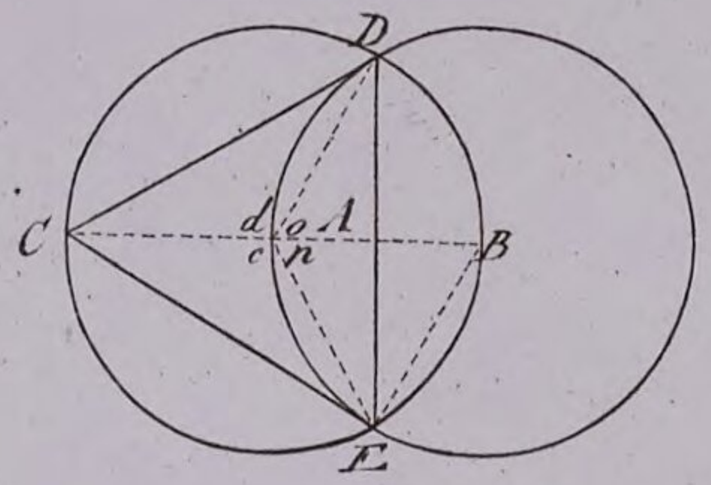
129.



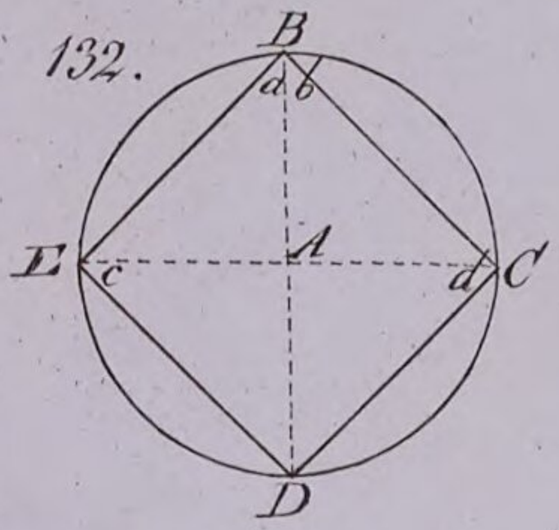
130.



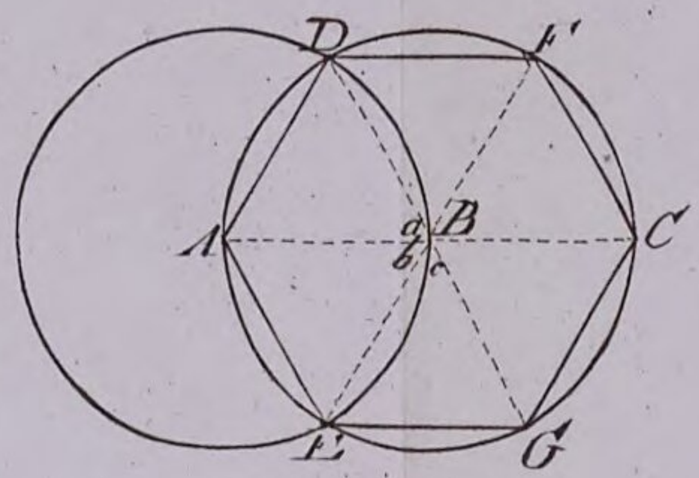
131.



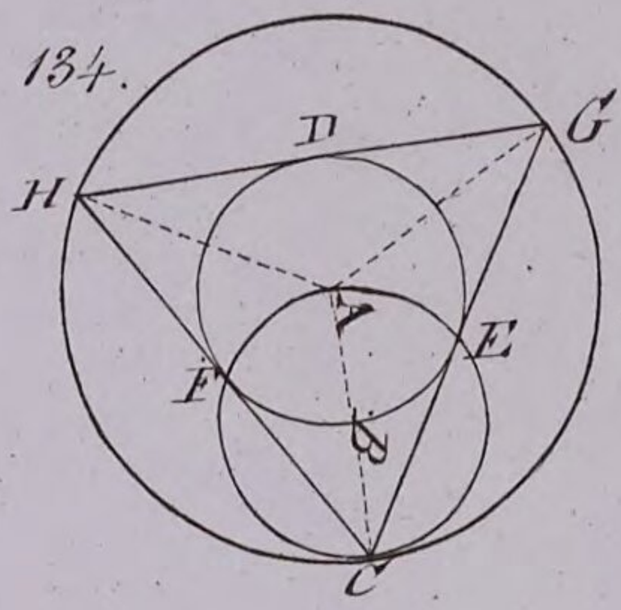
132.



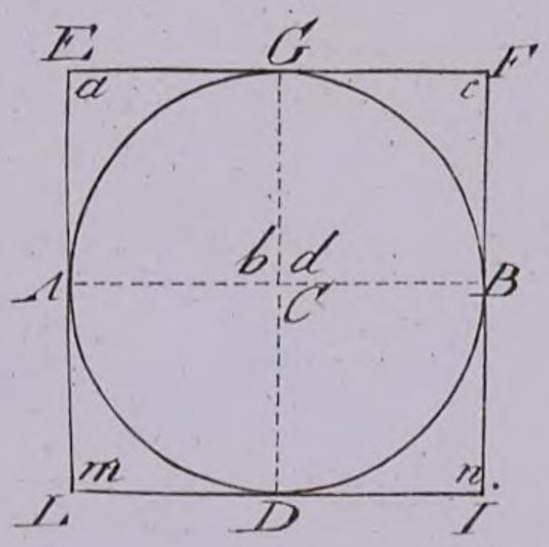
133.



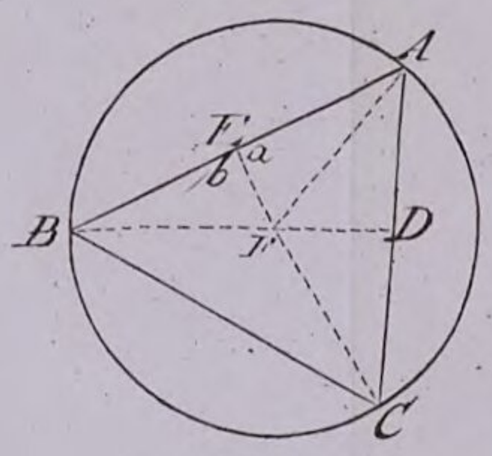
134.



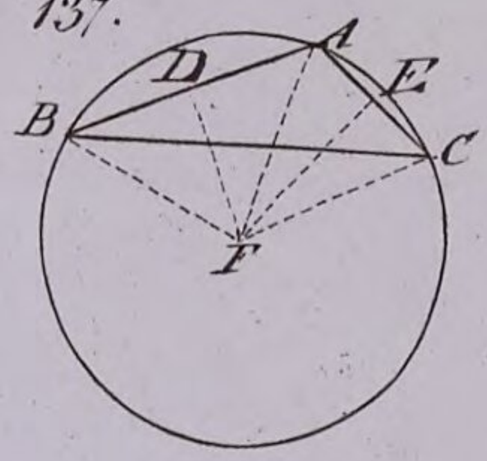
135.



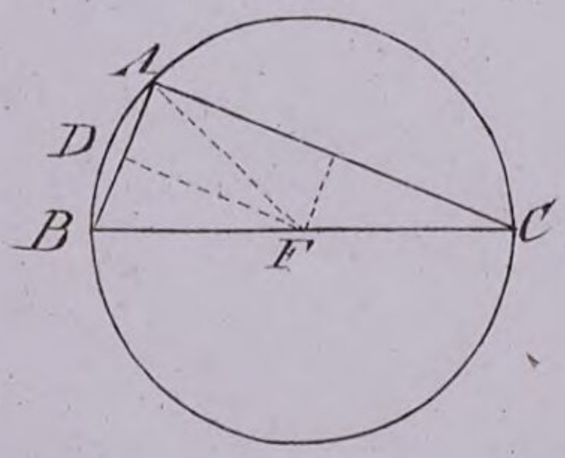
136.



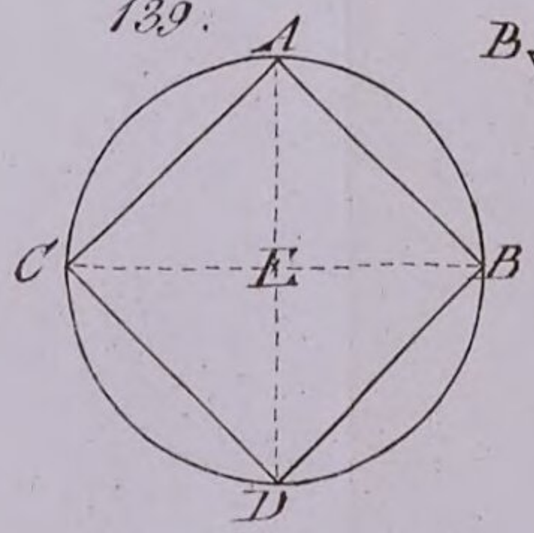
137.



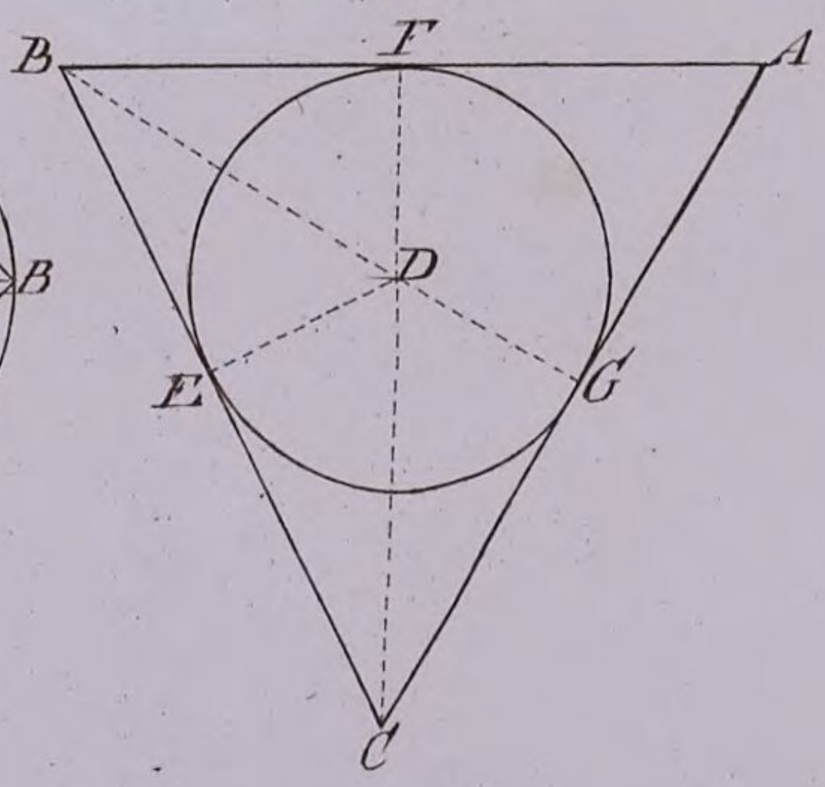
138.



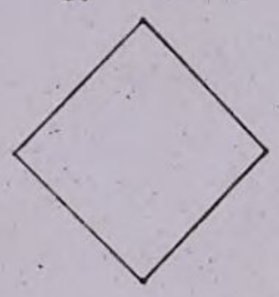
139.



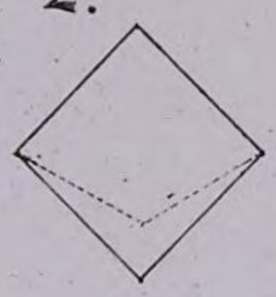
140.



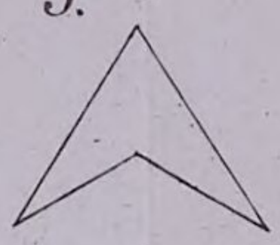
1.



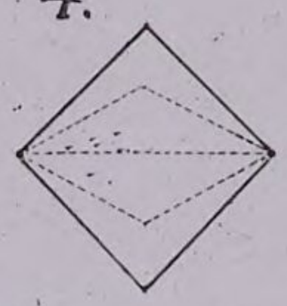
2.



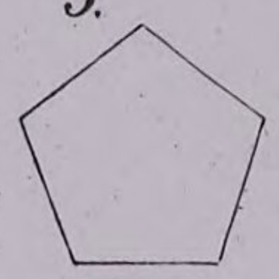
3.



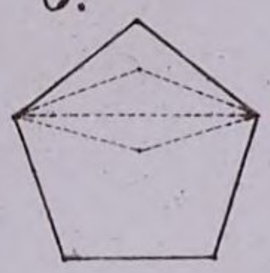
4.



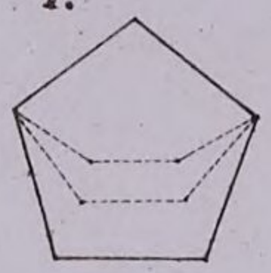
5.



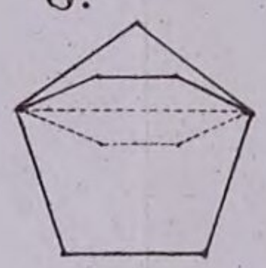
6.



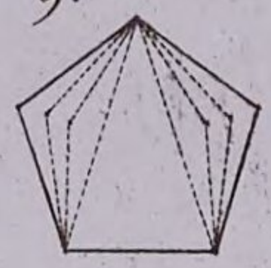
7.



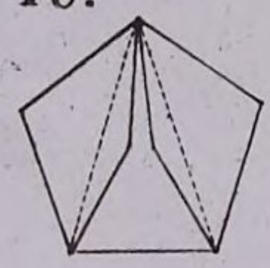
8.



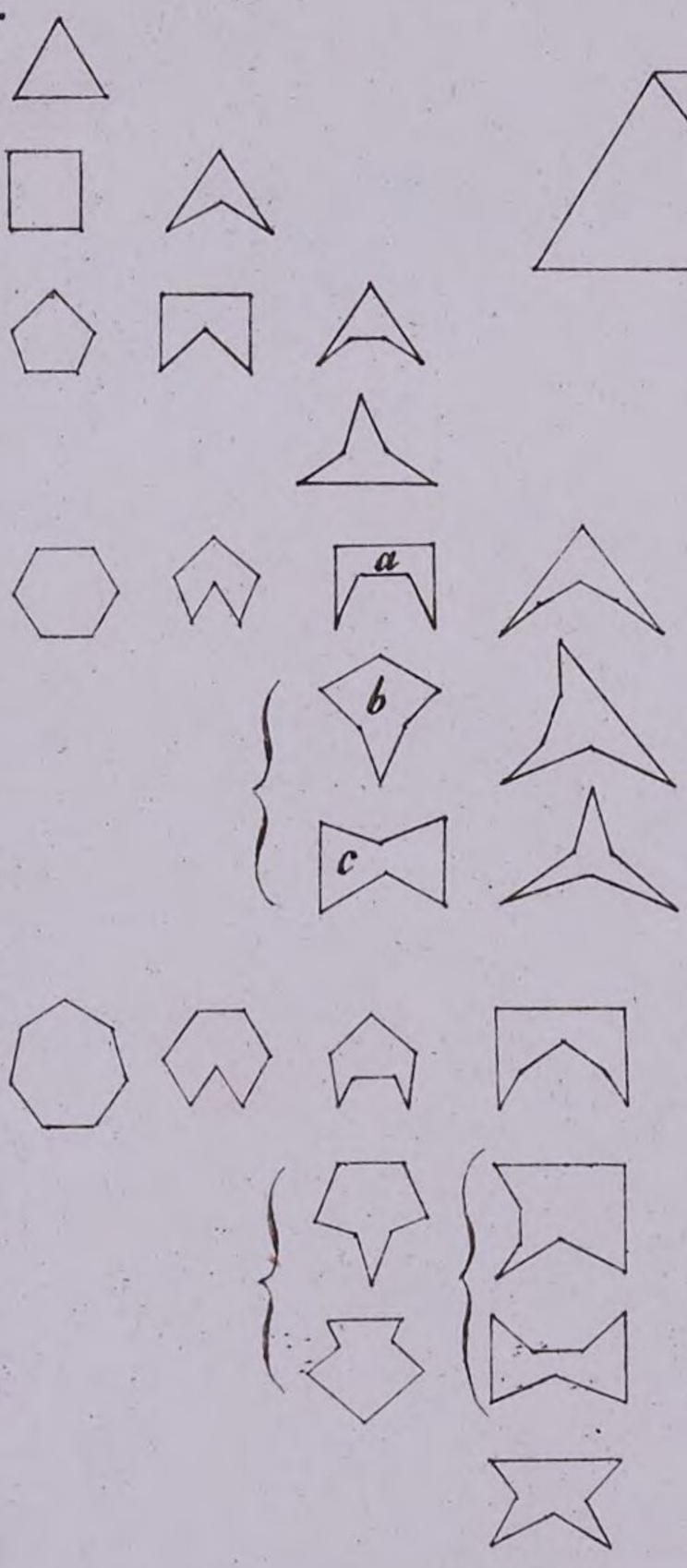
9.



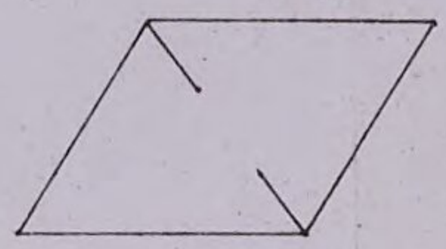
10.



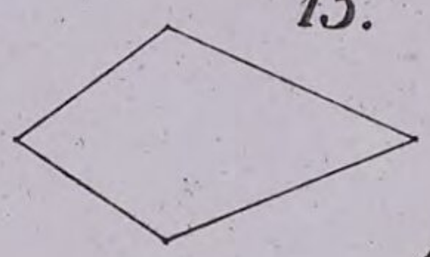
11.



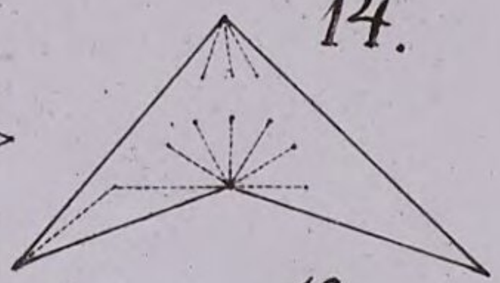
12.



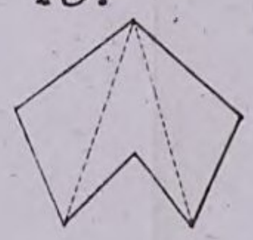
13.



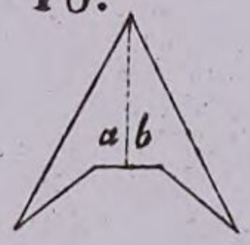
14.



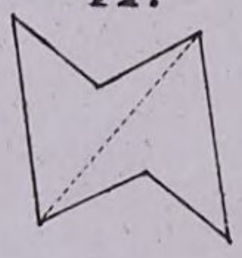
15.



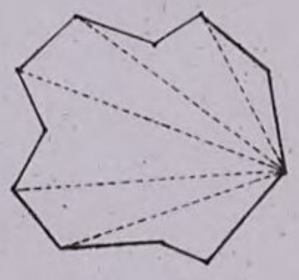
16.



17.

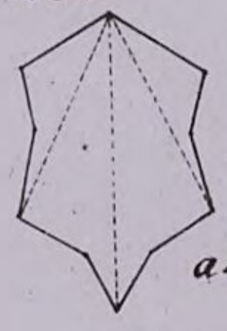


18.

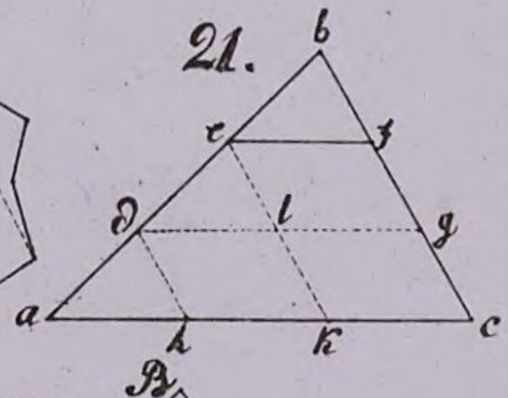


19.

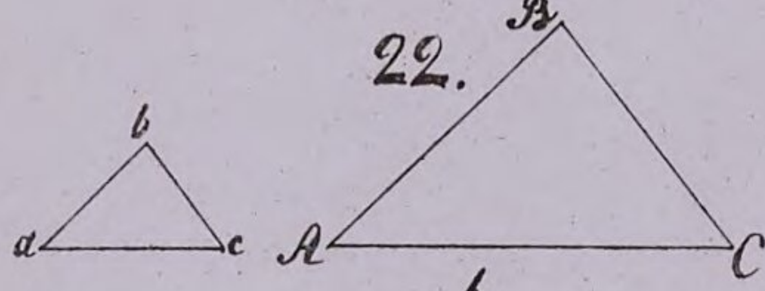
20.



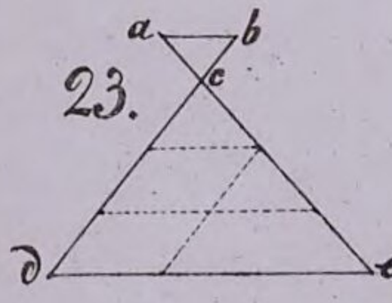
21.



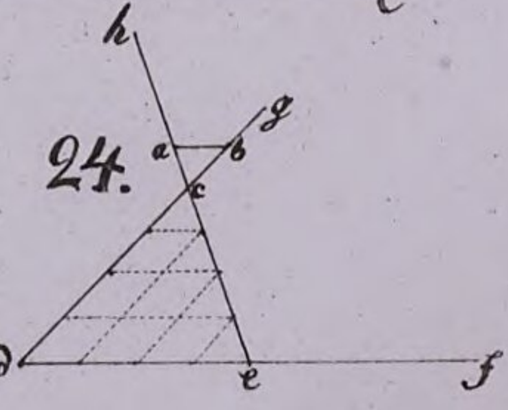
22.



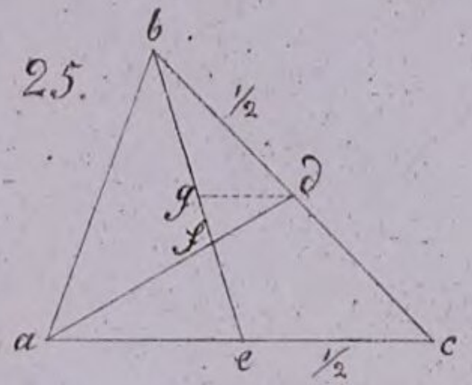
23.



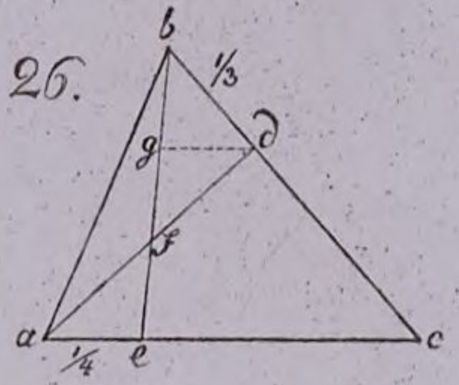
24.



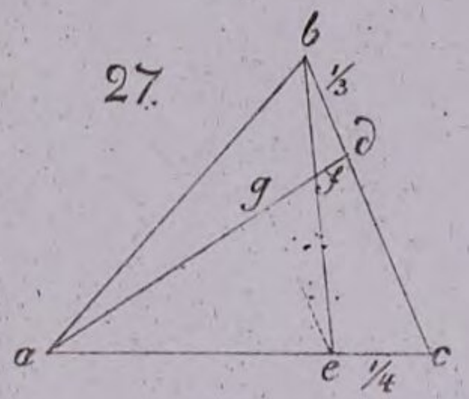
25.



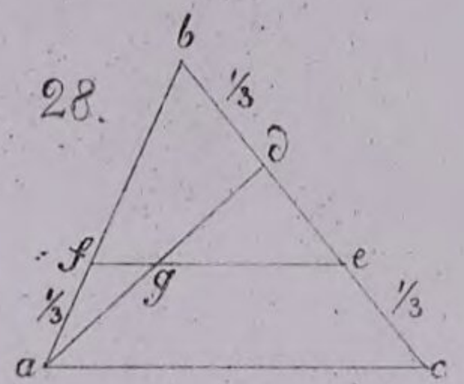
26.



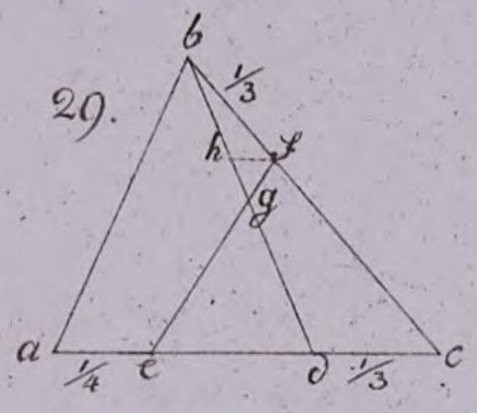
27.



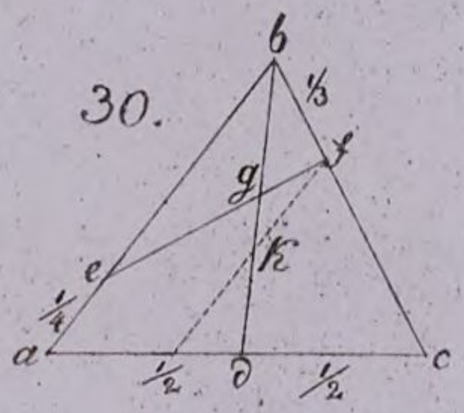
28.



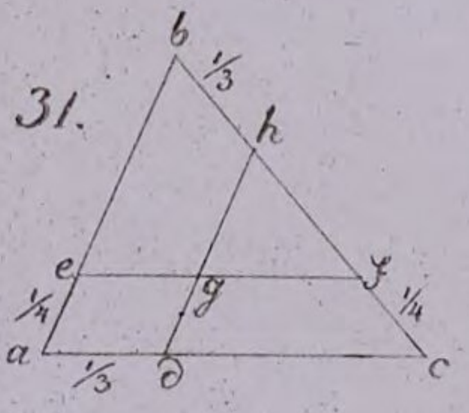
29.



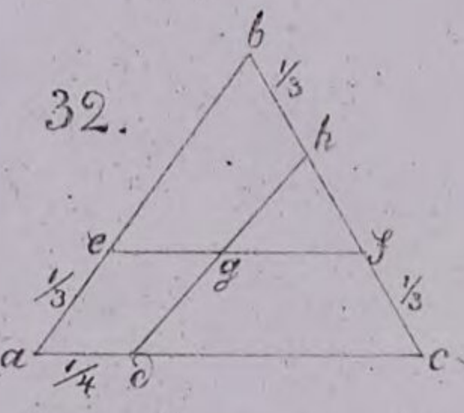
30.



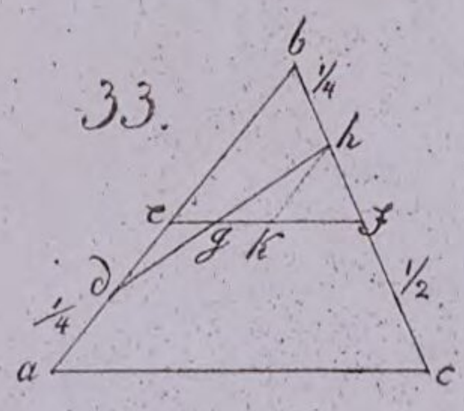
31.



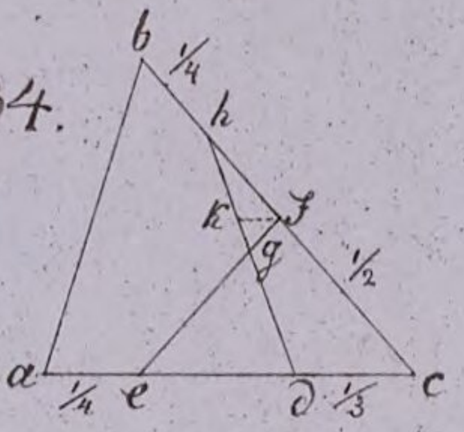
32.



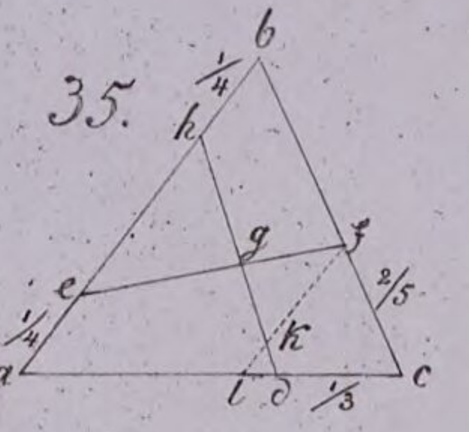
33.



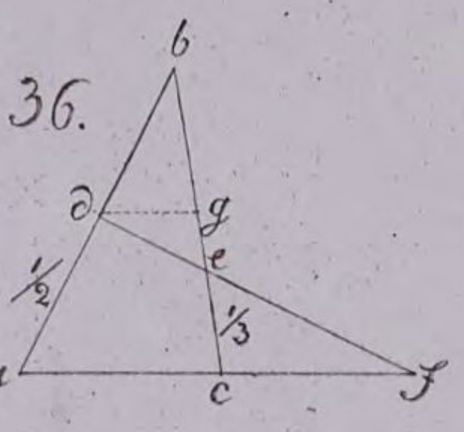
34.



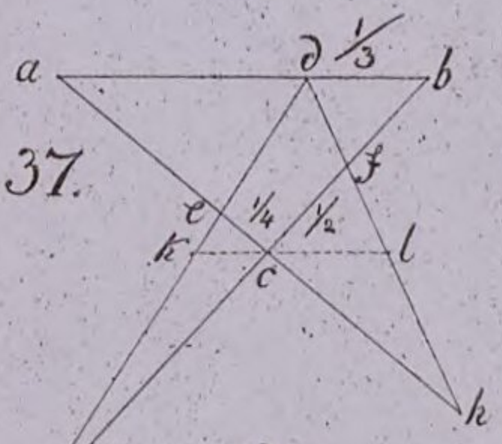
35.



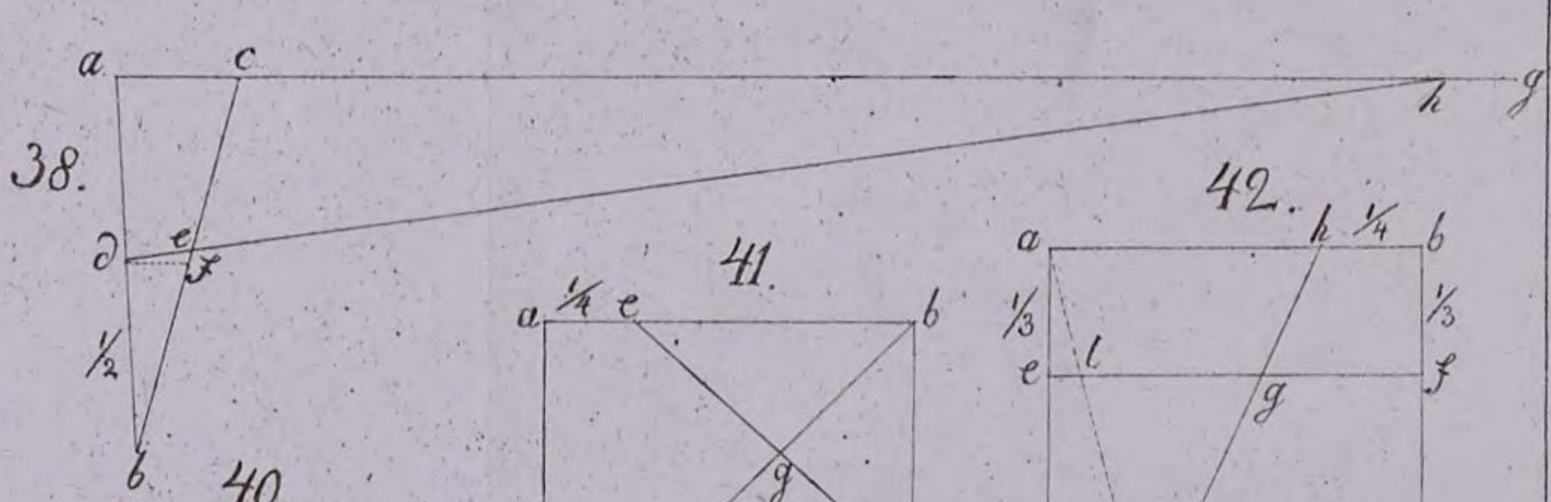
36.



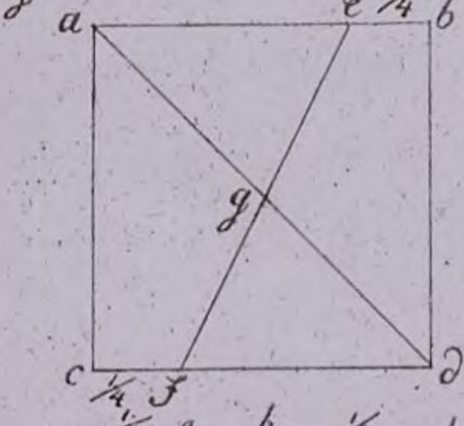
37.



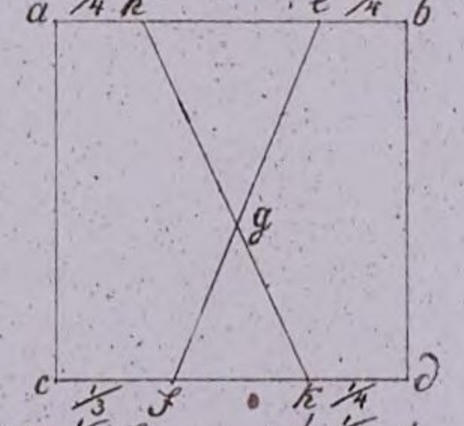
38.



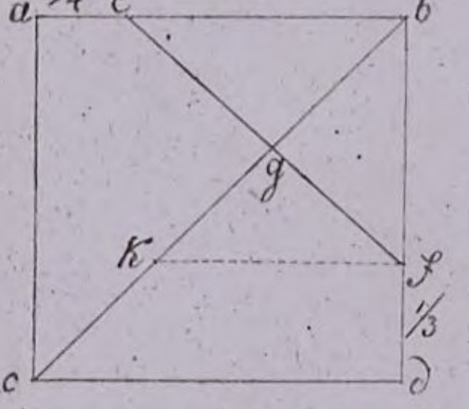
39.



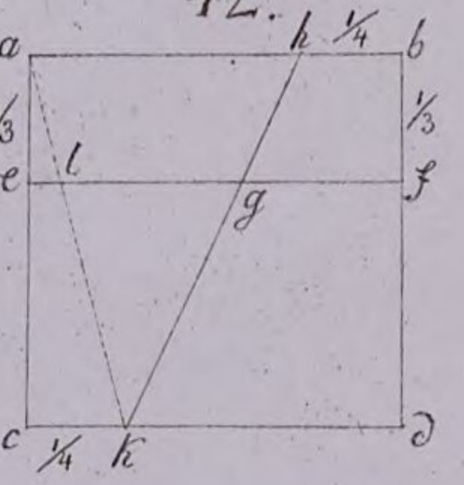
40.



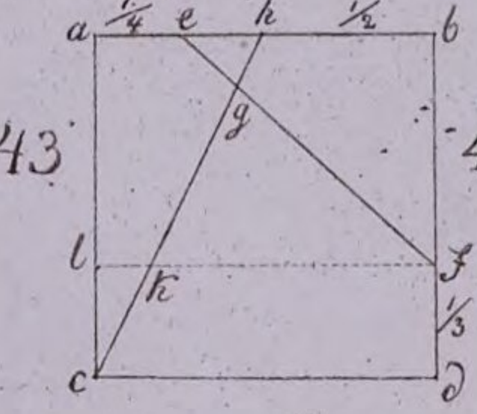
41.



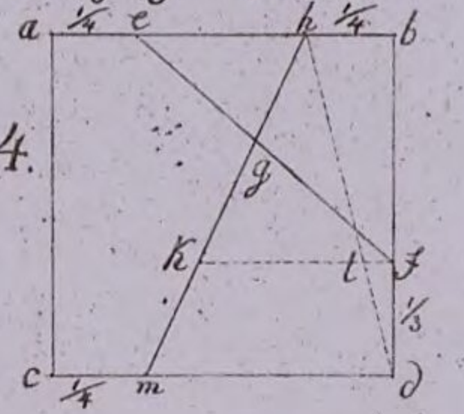
42.



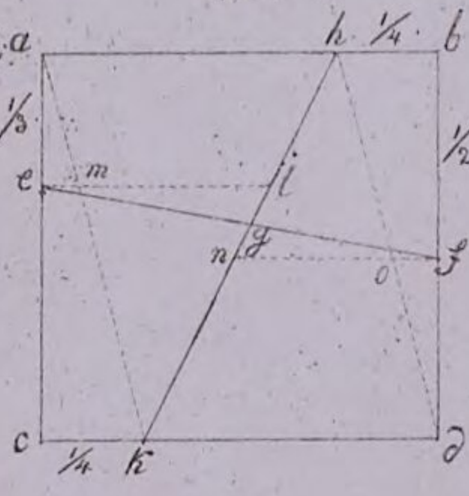
43.



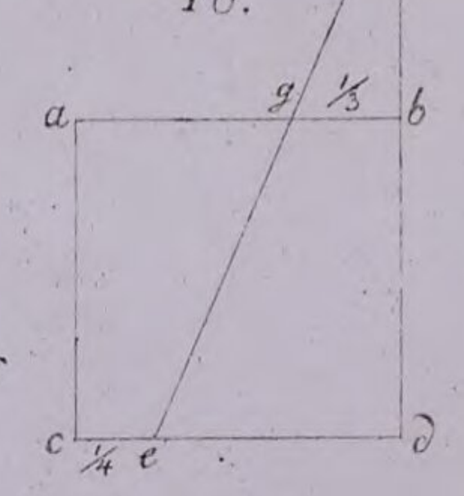
44.



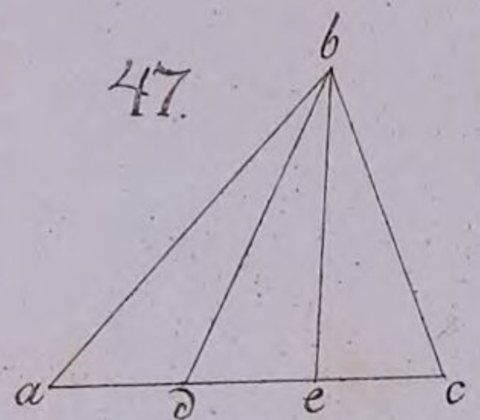
45.



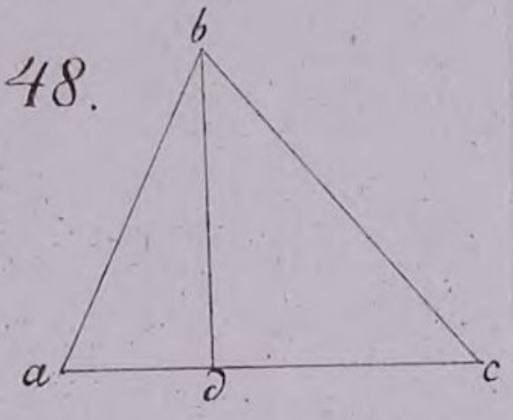
46.



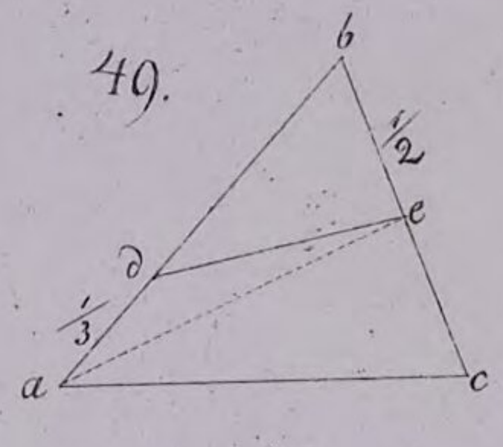
47.



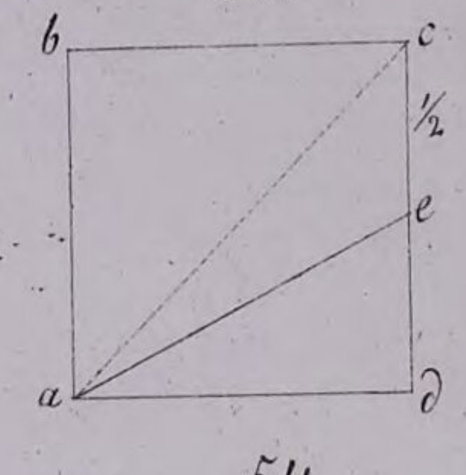
48.



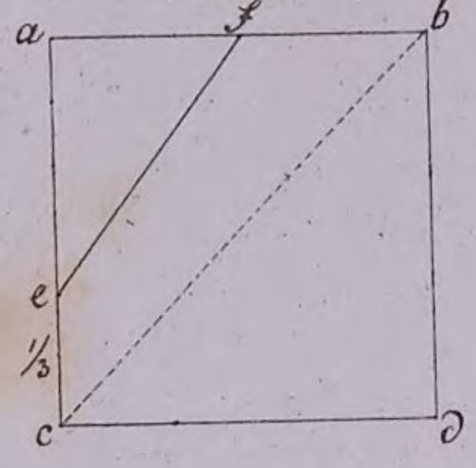
49.



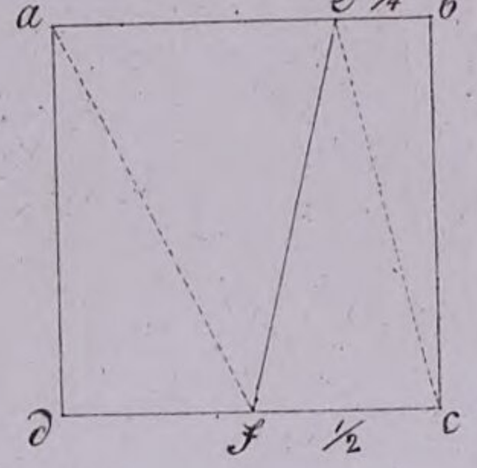
50.



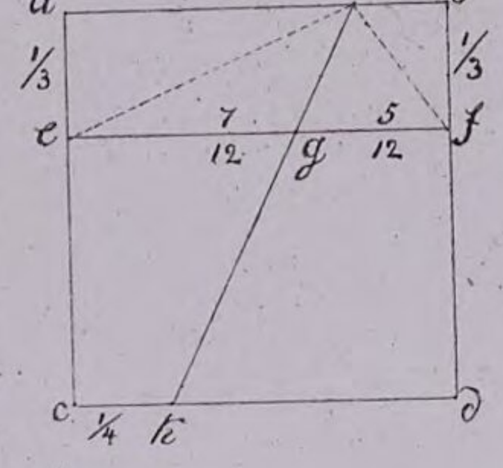
51.



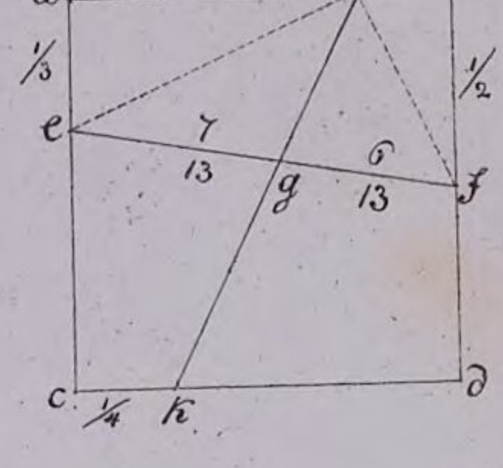
52.



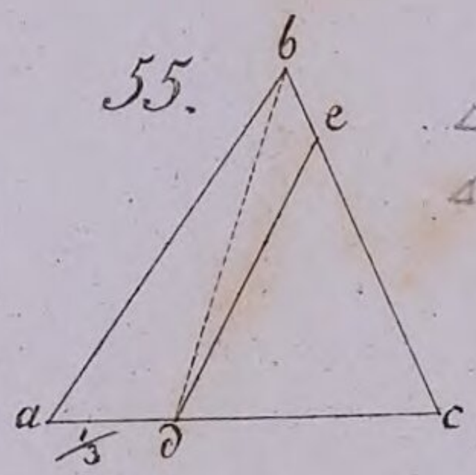
53.



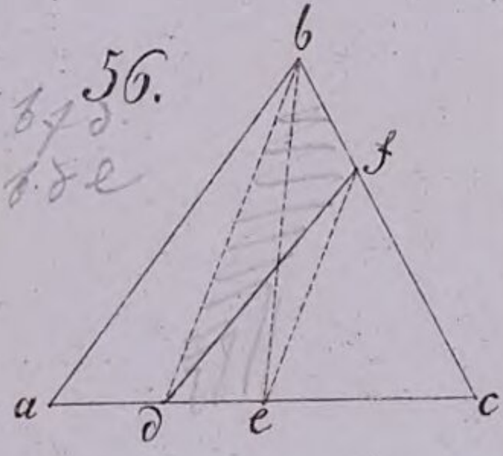
54.



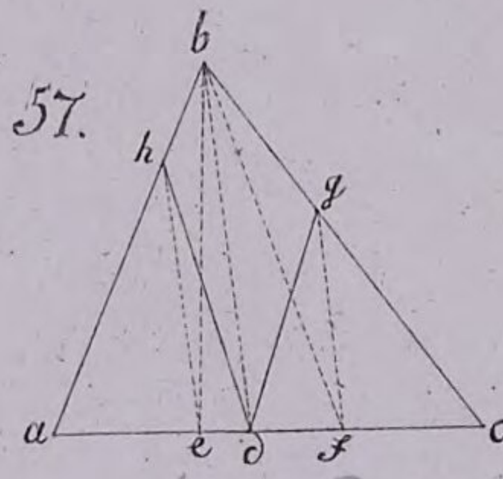
55.



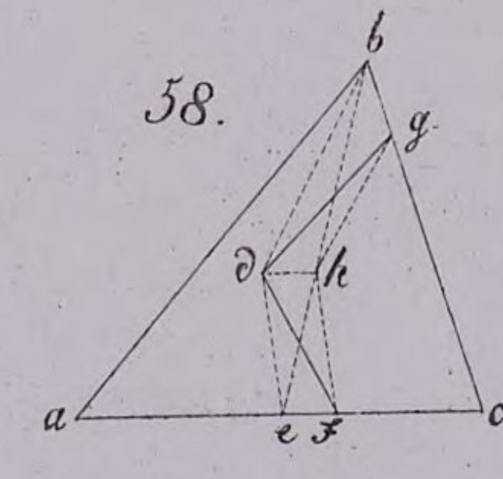
56.



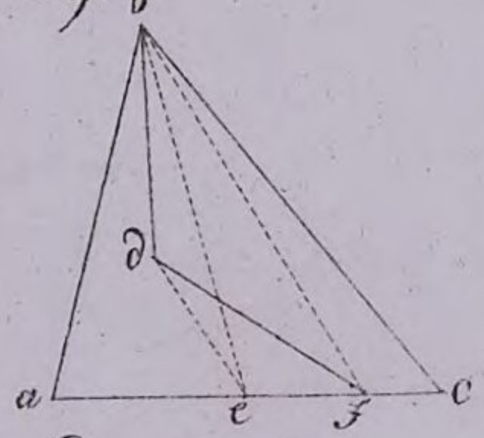
57.



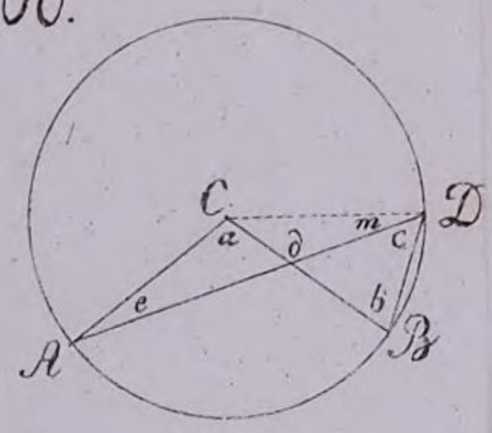
58.



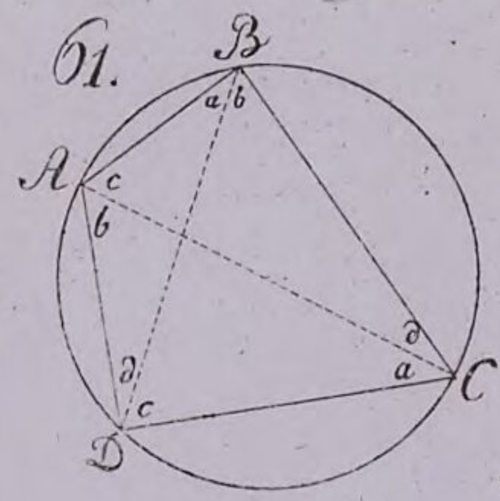
59.



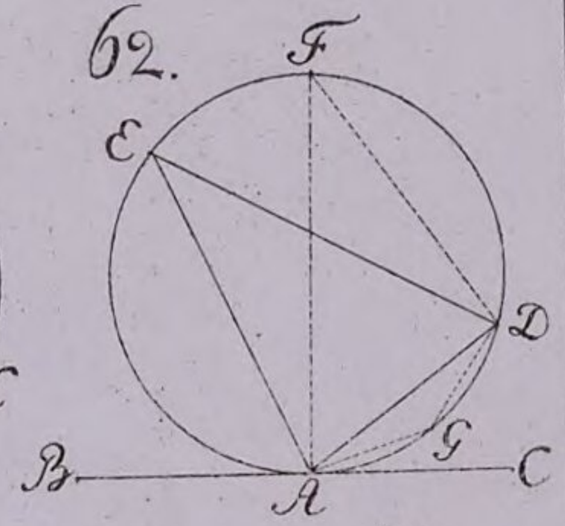
60.



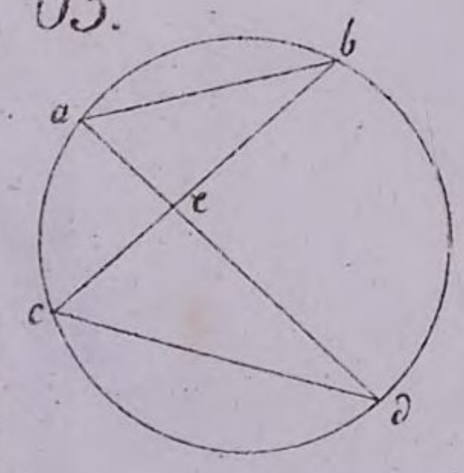
61.



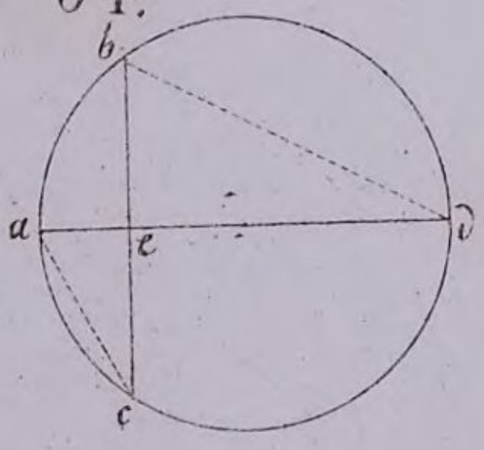
62.



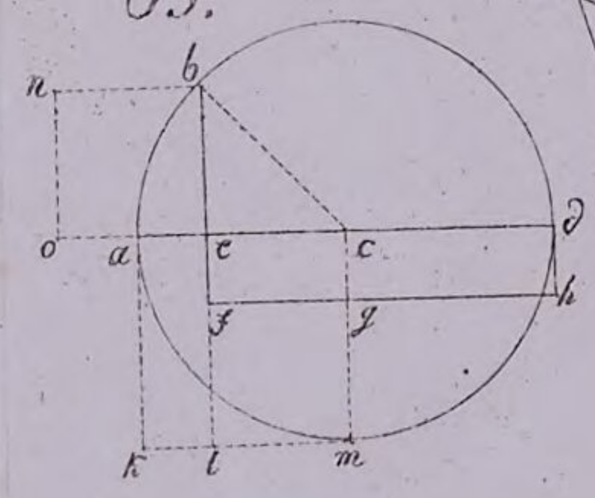
63.



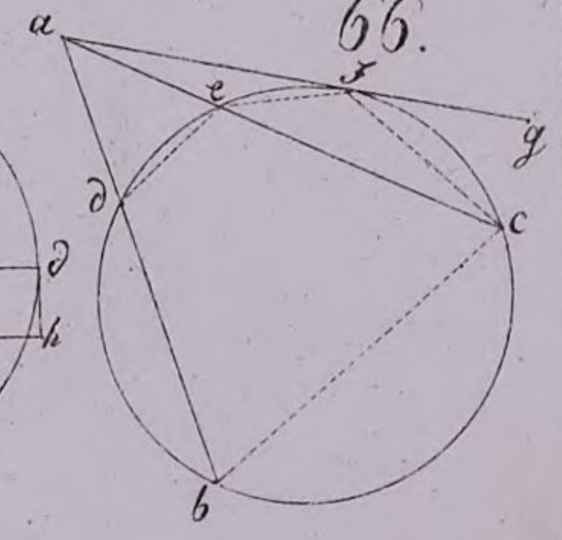
64.



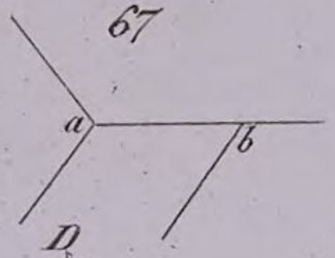
65.



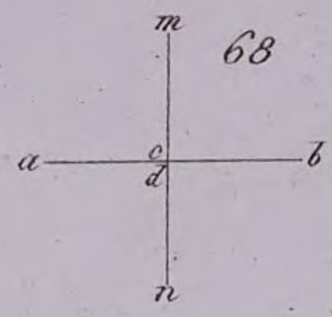
66.



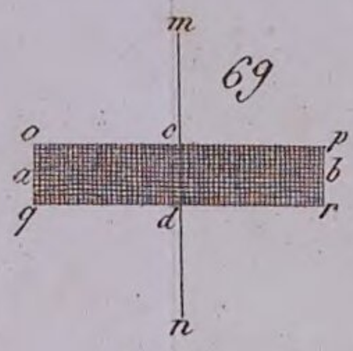
67



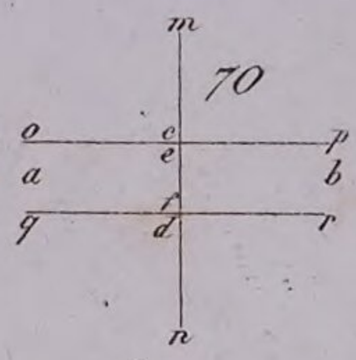
68



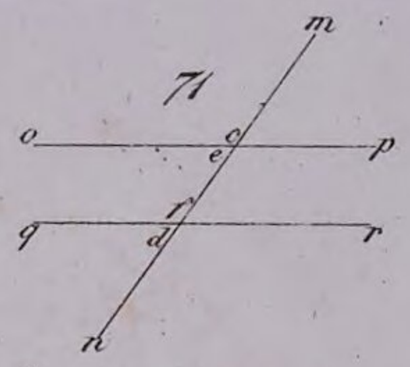
69



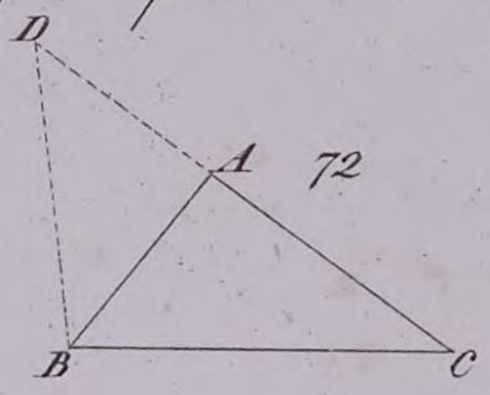
70



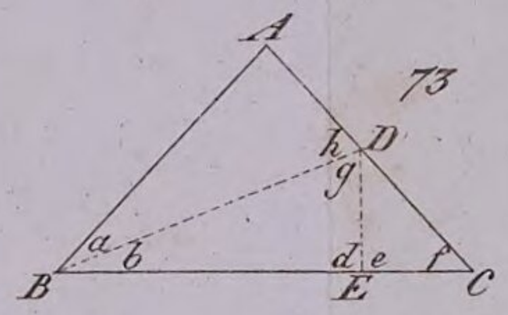
71



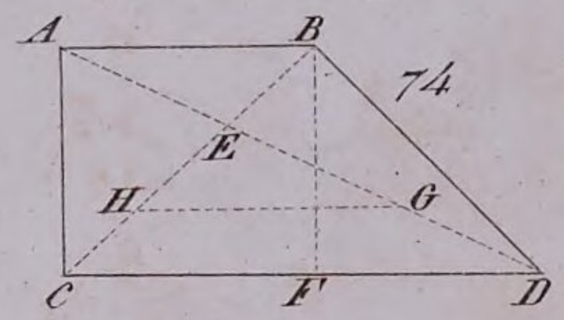
72



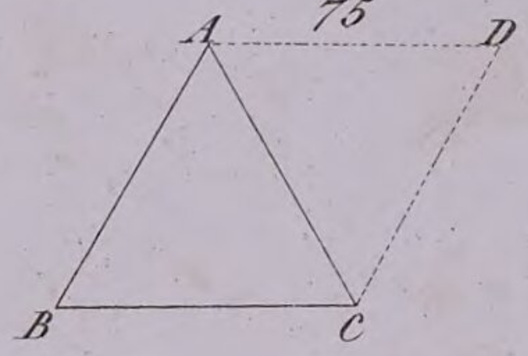
73



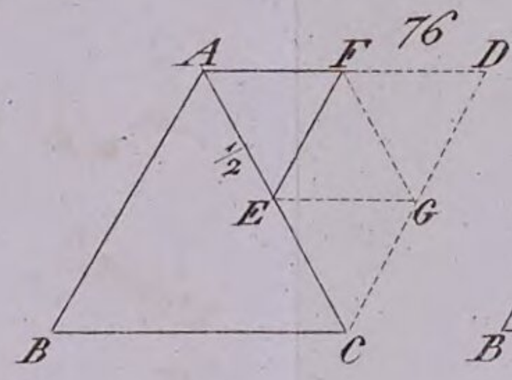
74



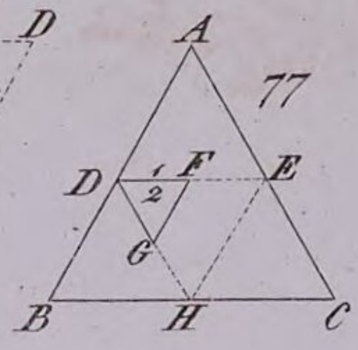
75



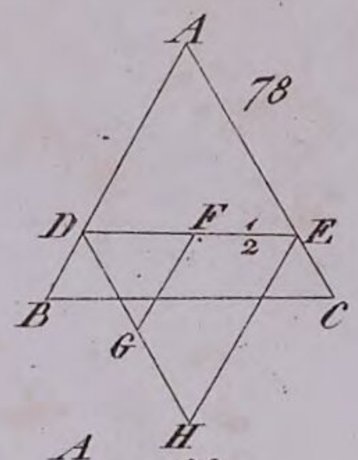
76



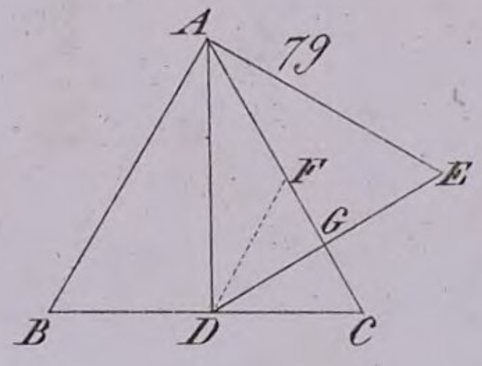
77



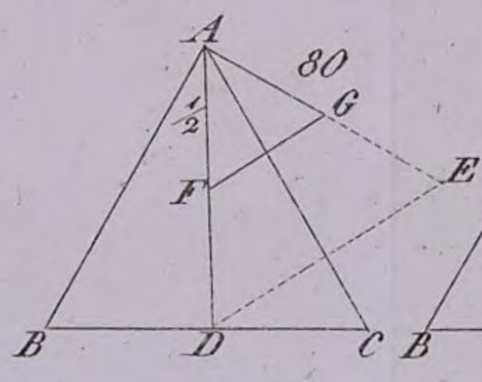
78



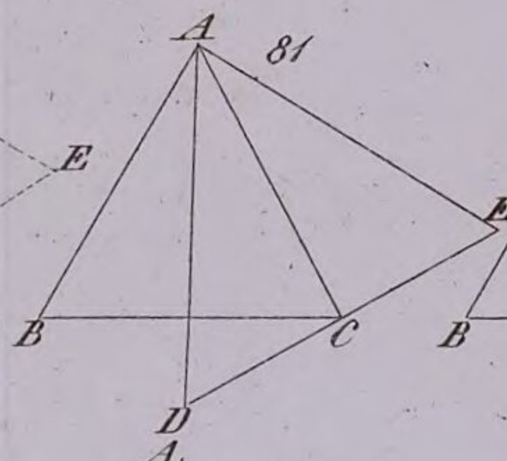
79



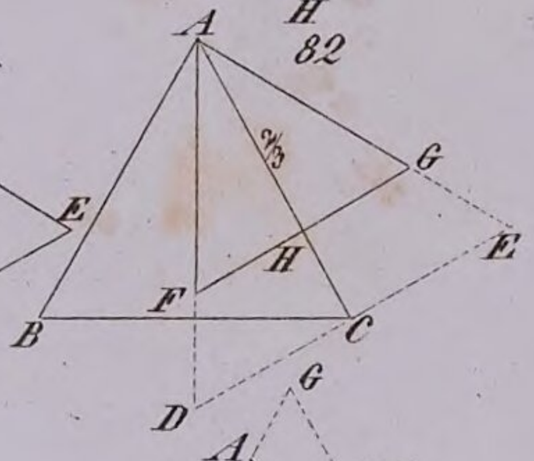
80



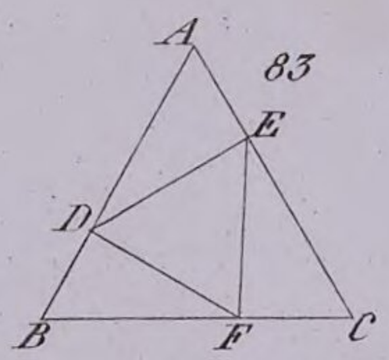
81



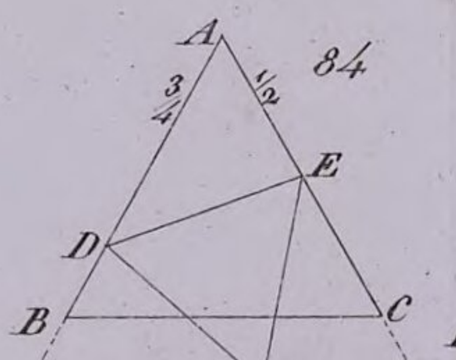
82



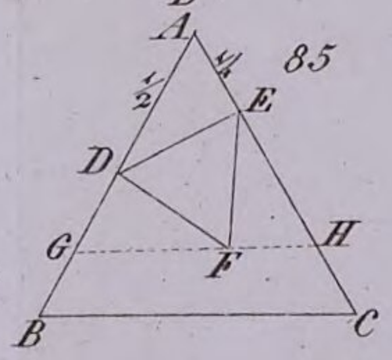
83



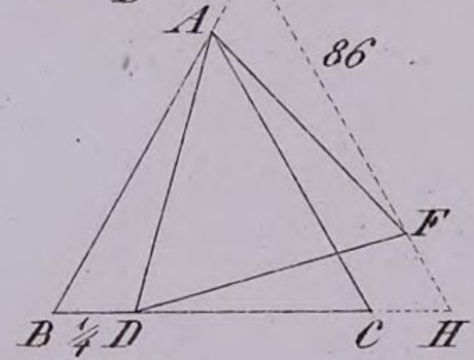
84



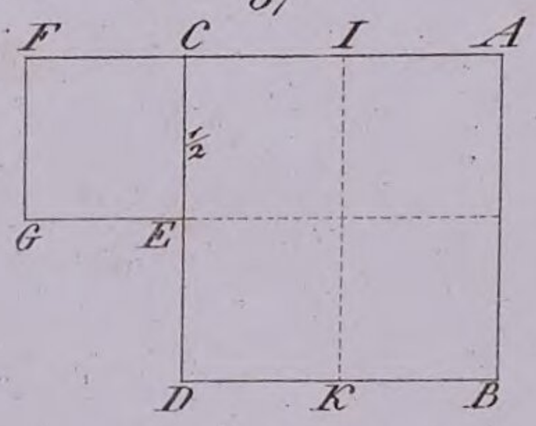
85



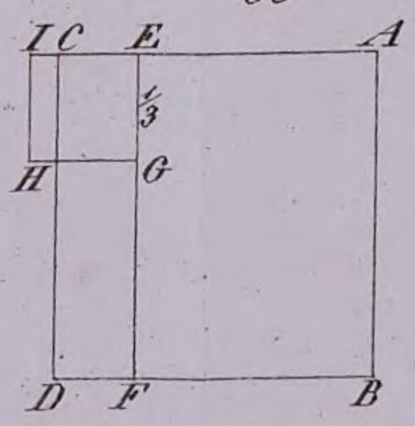
86



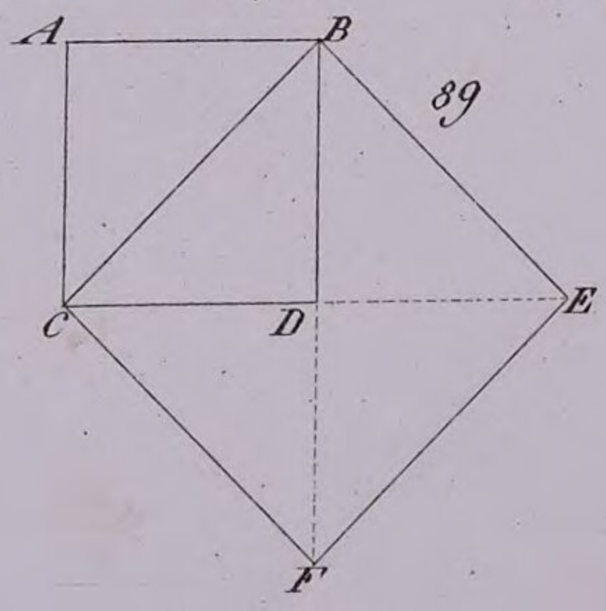
87



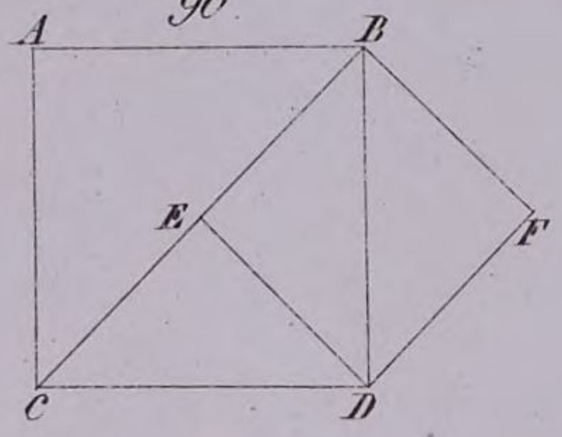
88



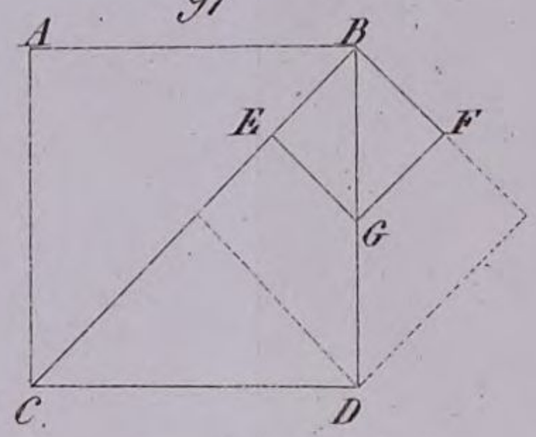
89



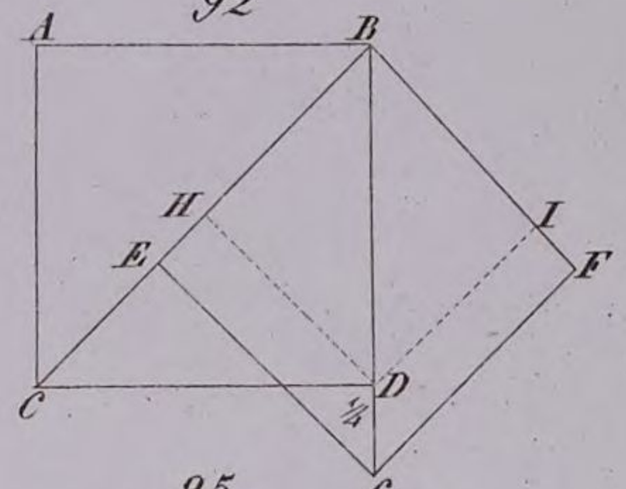
90



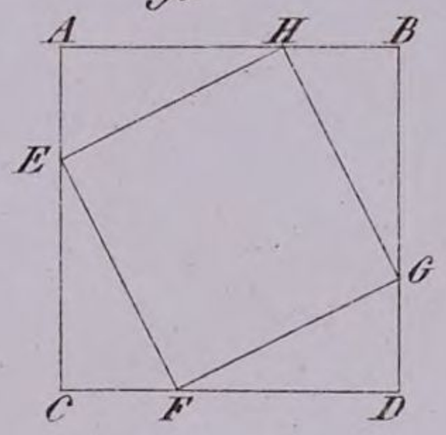
91



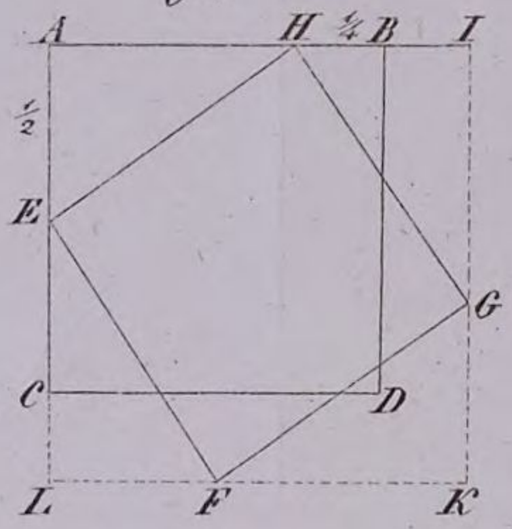
92



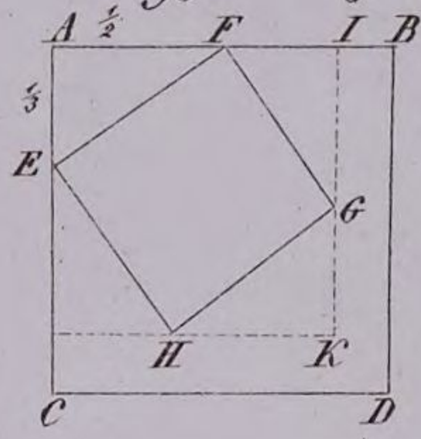
93



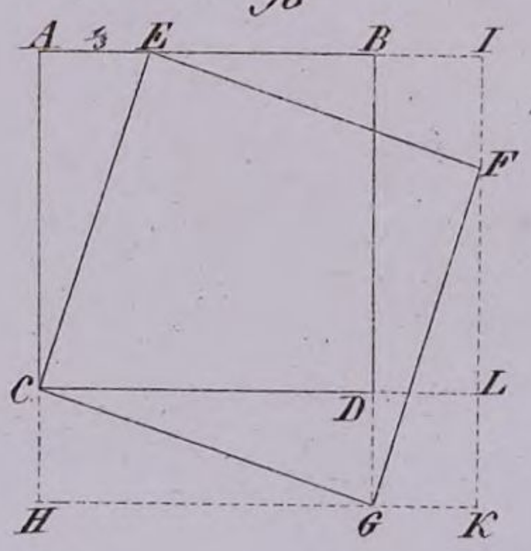
94



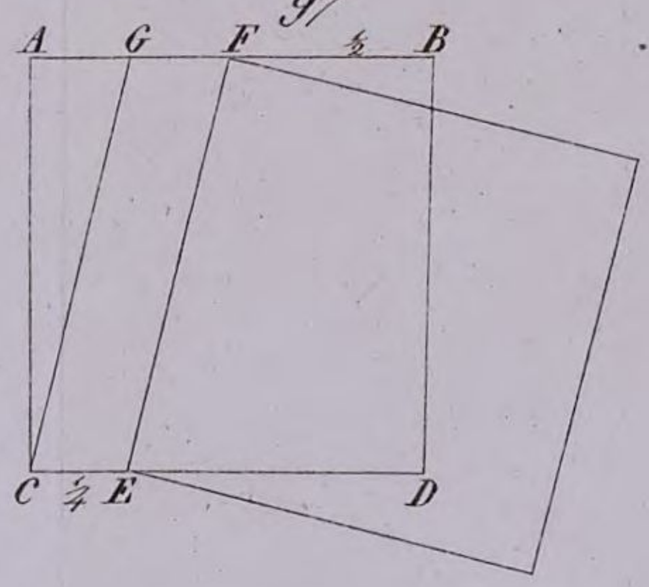
95



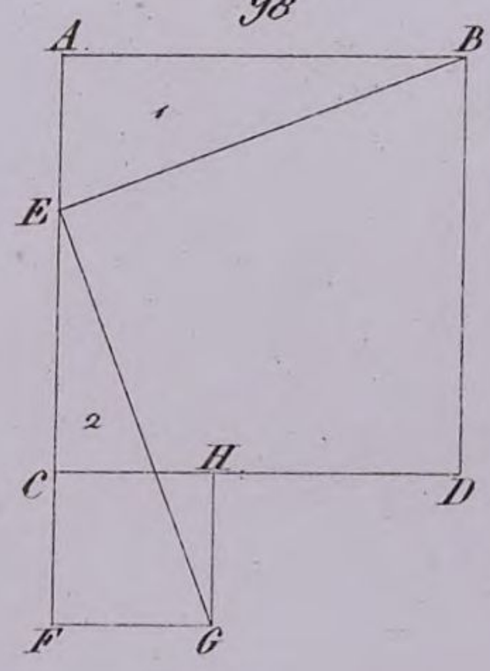
96



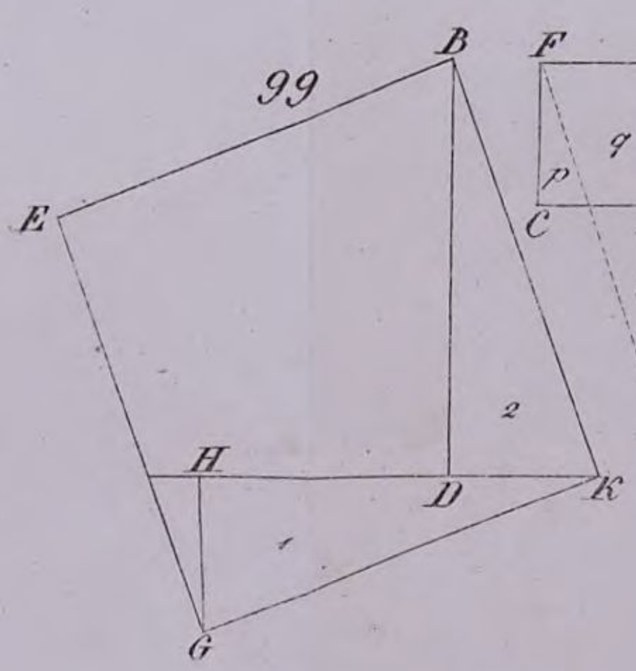
97



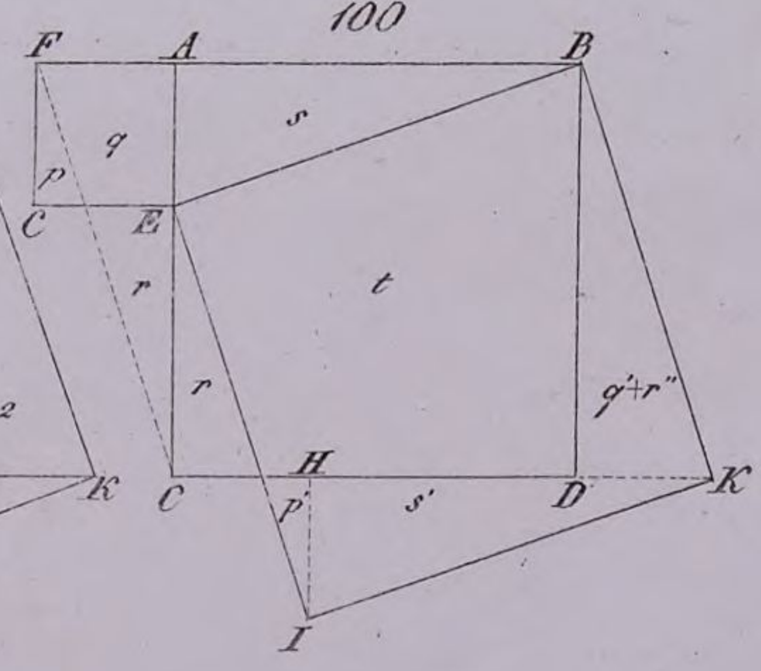
98



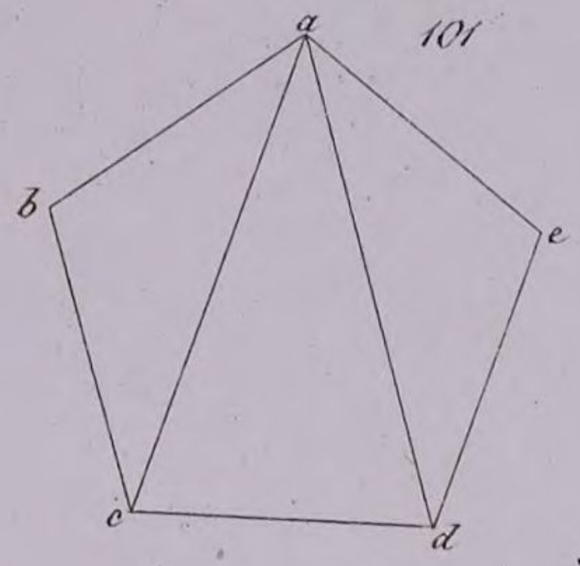
99



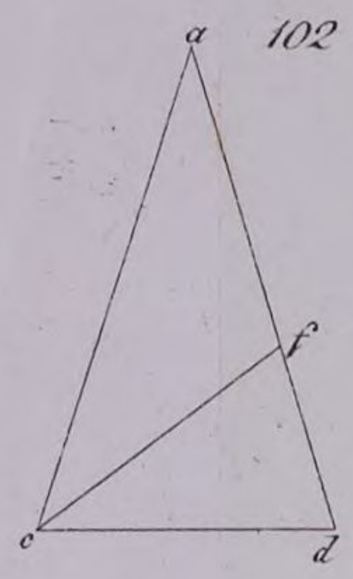
100



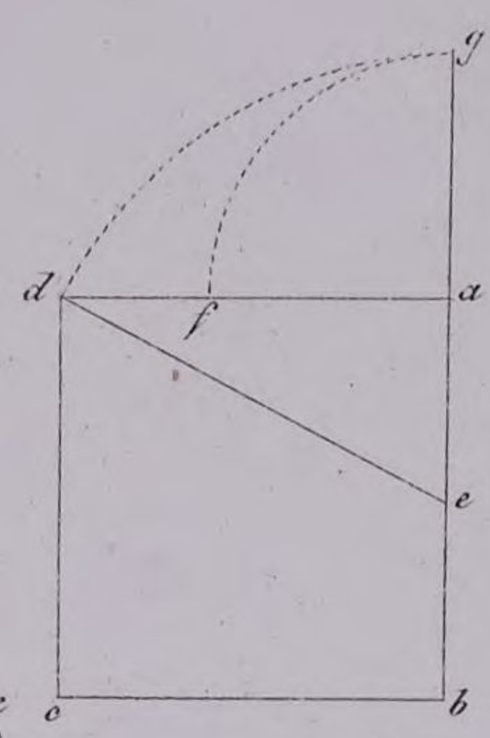
101



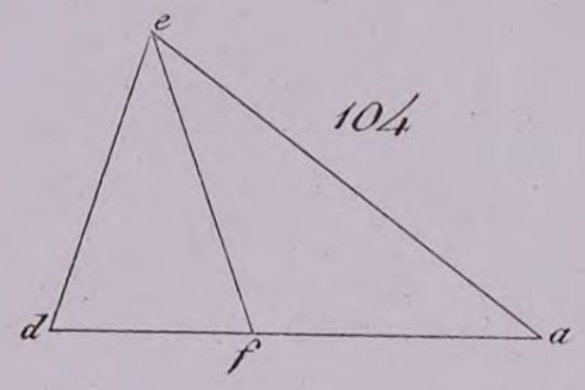
102



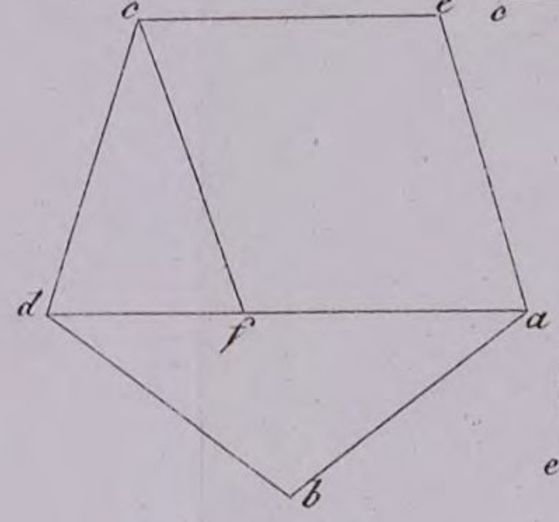
103



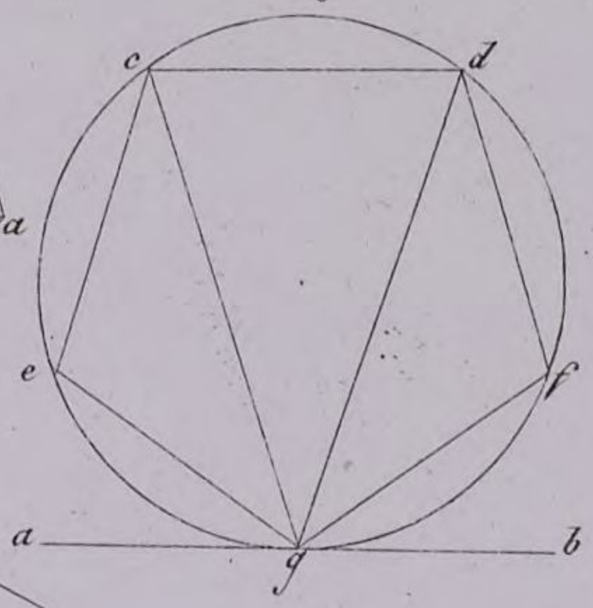
104



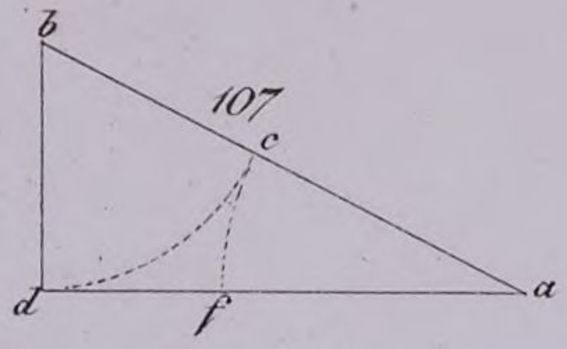
105



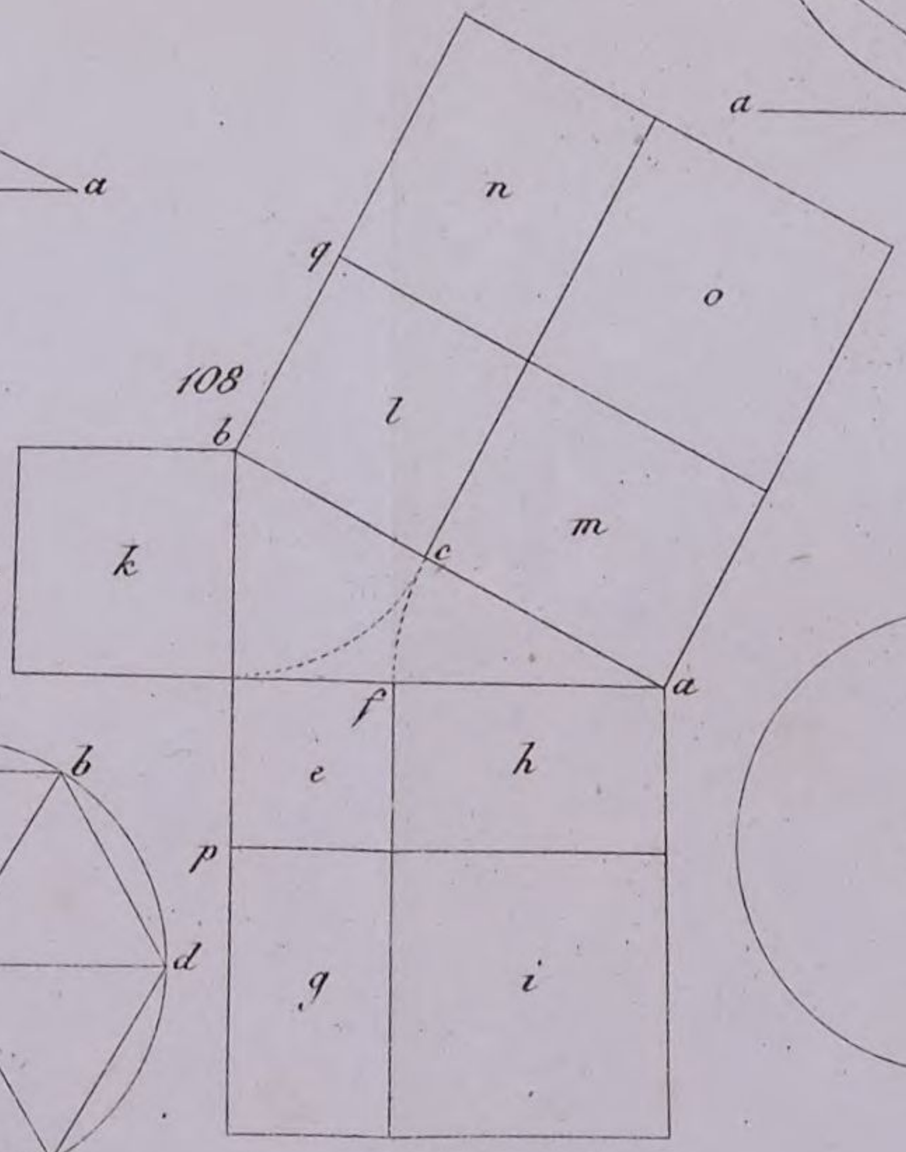
109



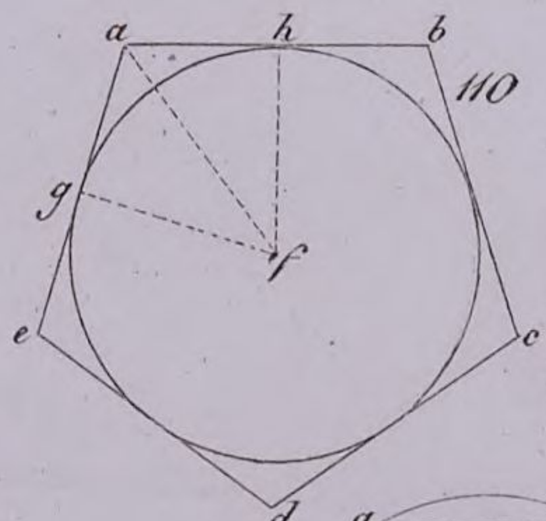
107



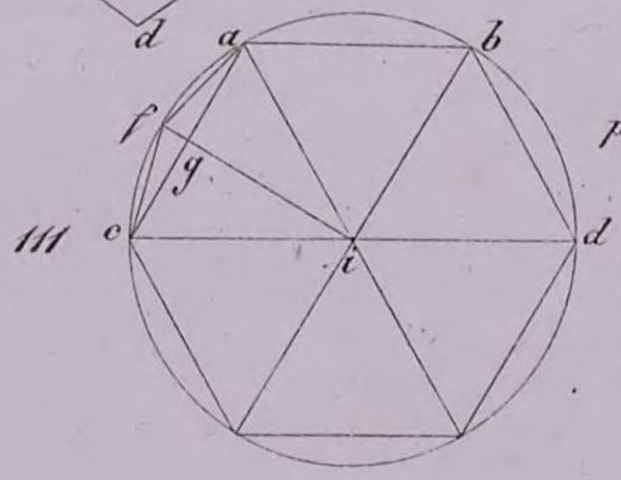
108



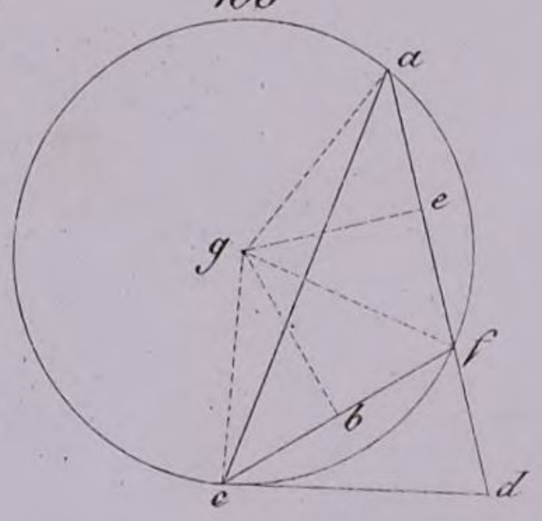
110



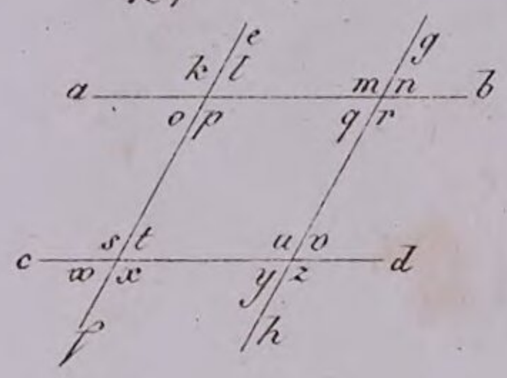
111



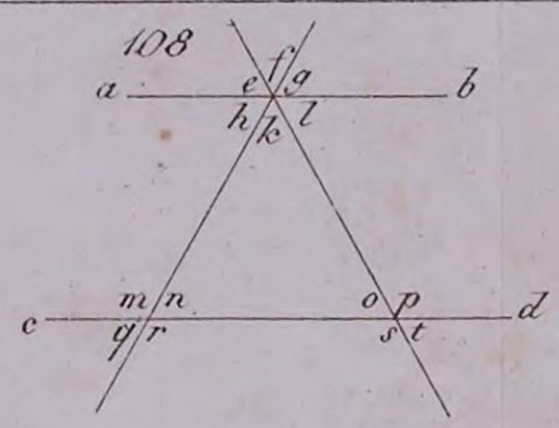
106



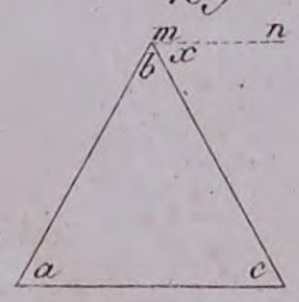
107



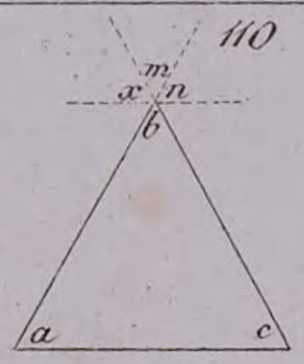
108



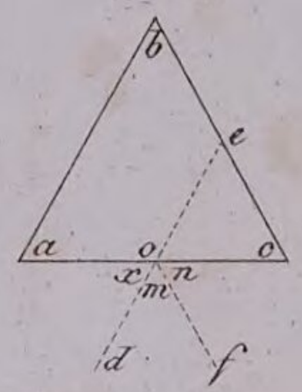
109

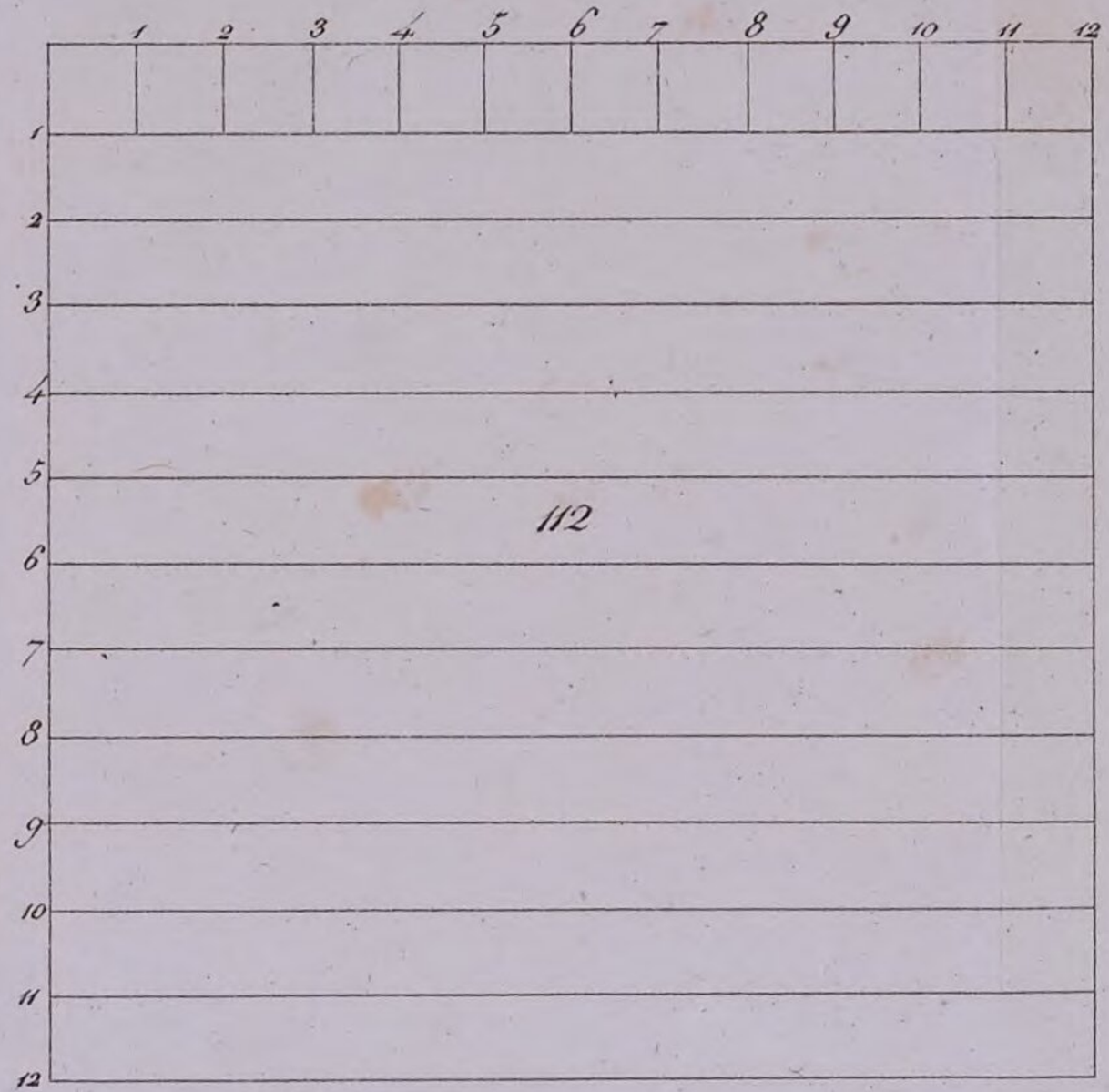


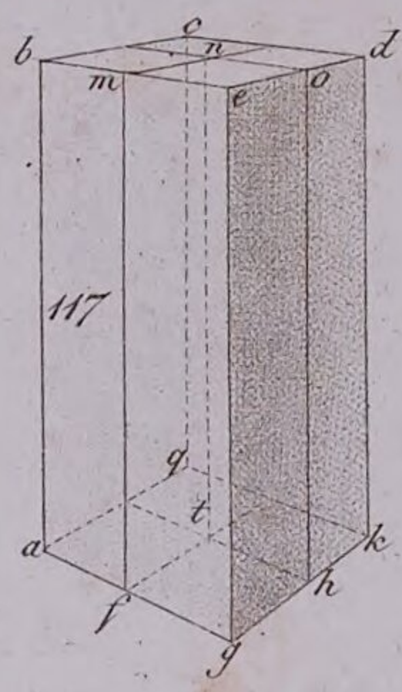
110

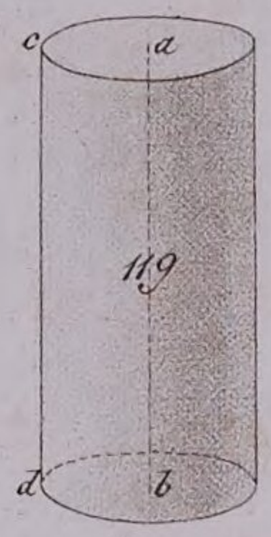


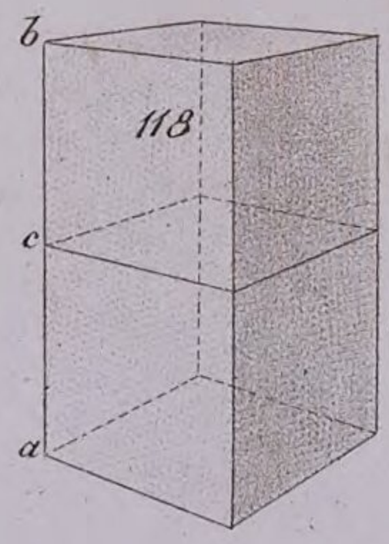
111



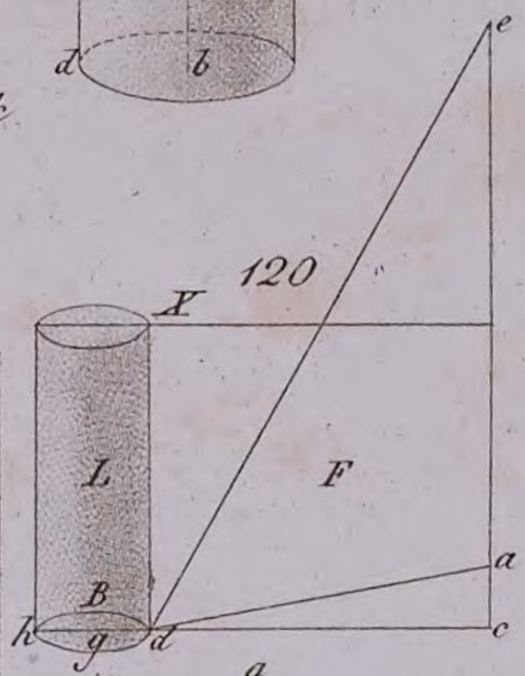


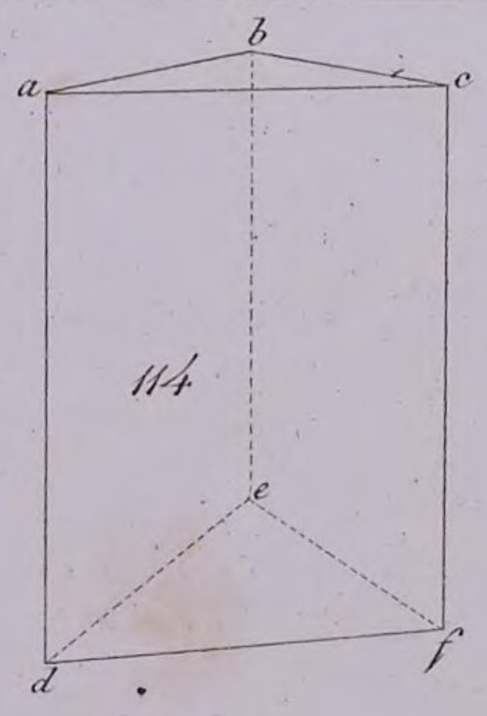


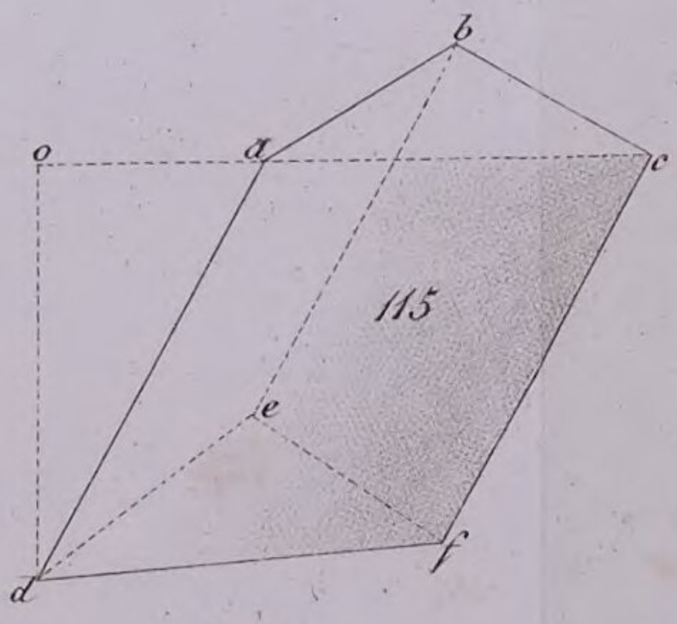


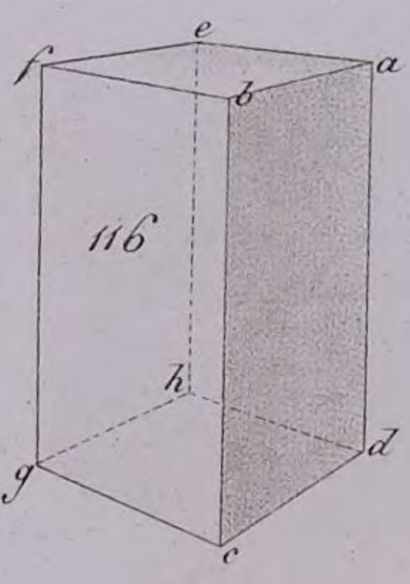


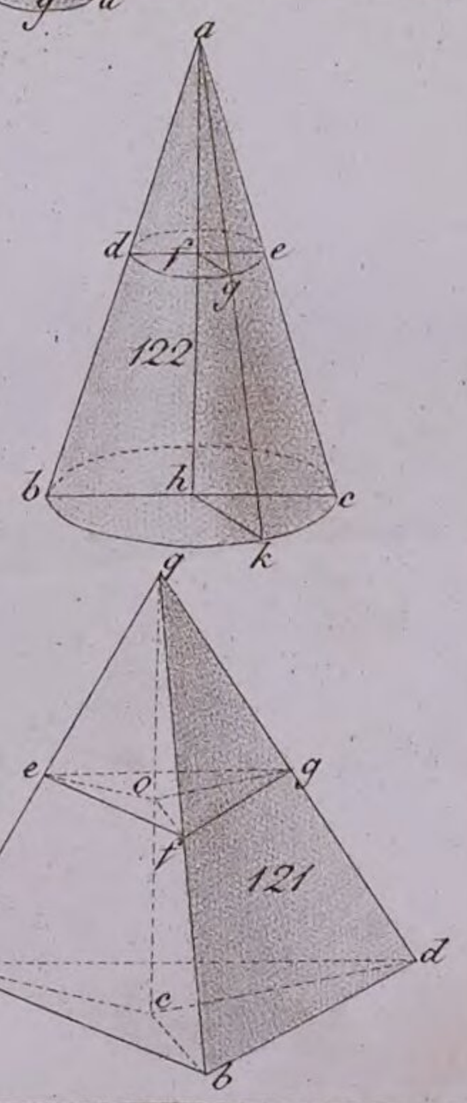
120





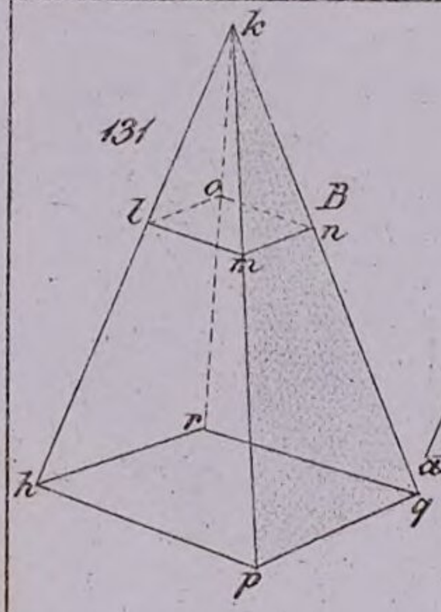




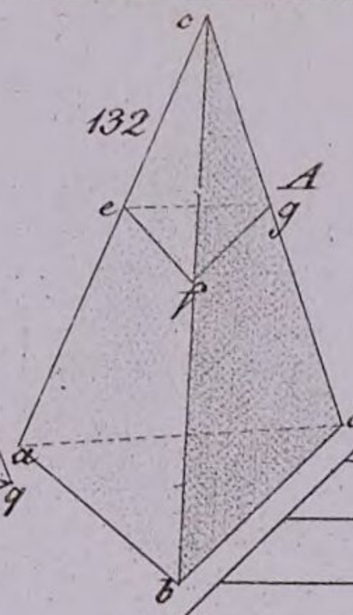


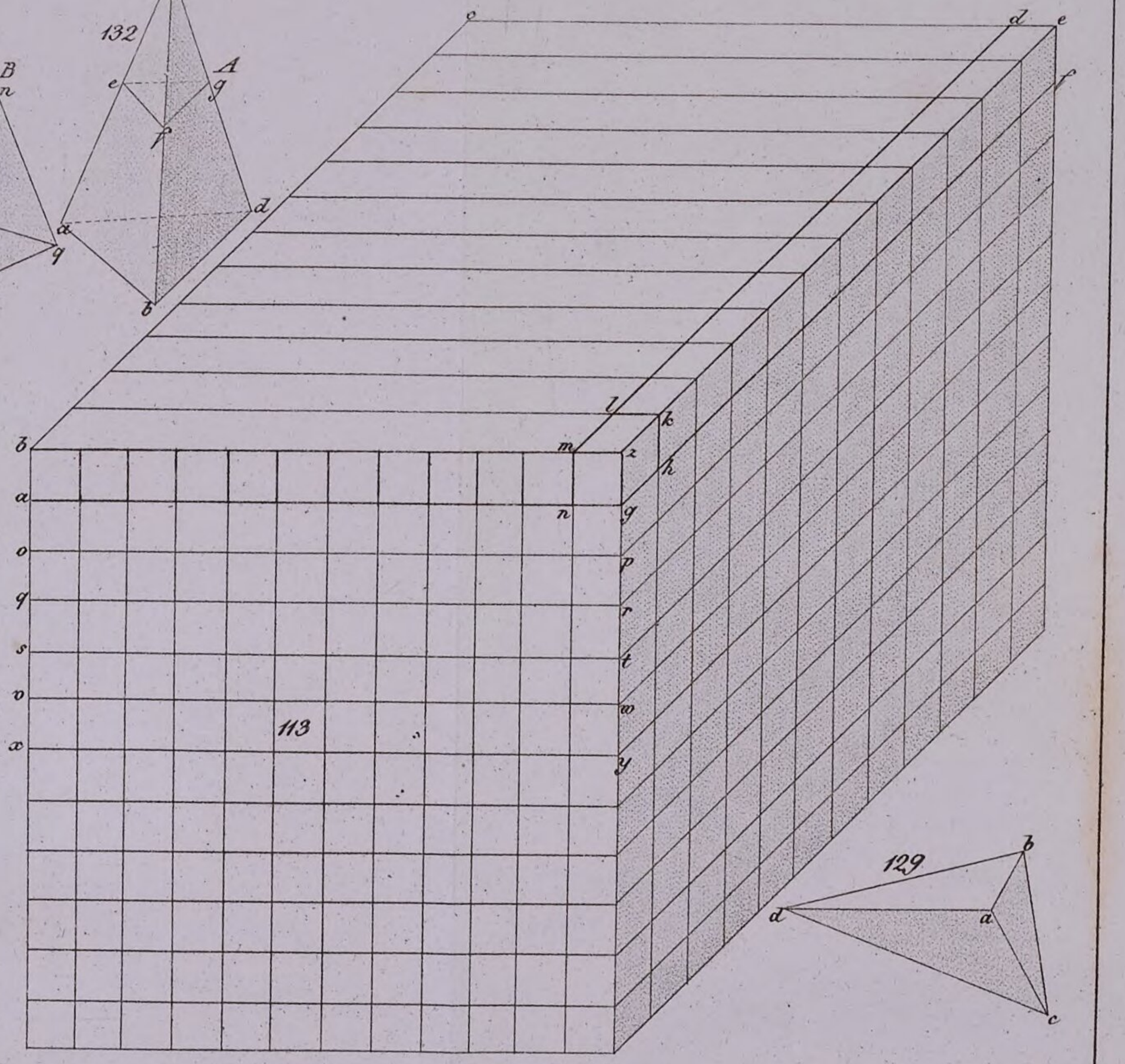
gest. b. K. Kolbe. v. J. Zipter.

131



132

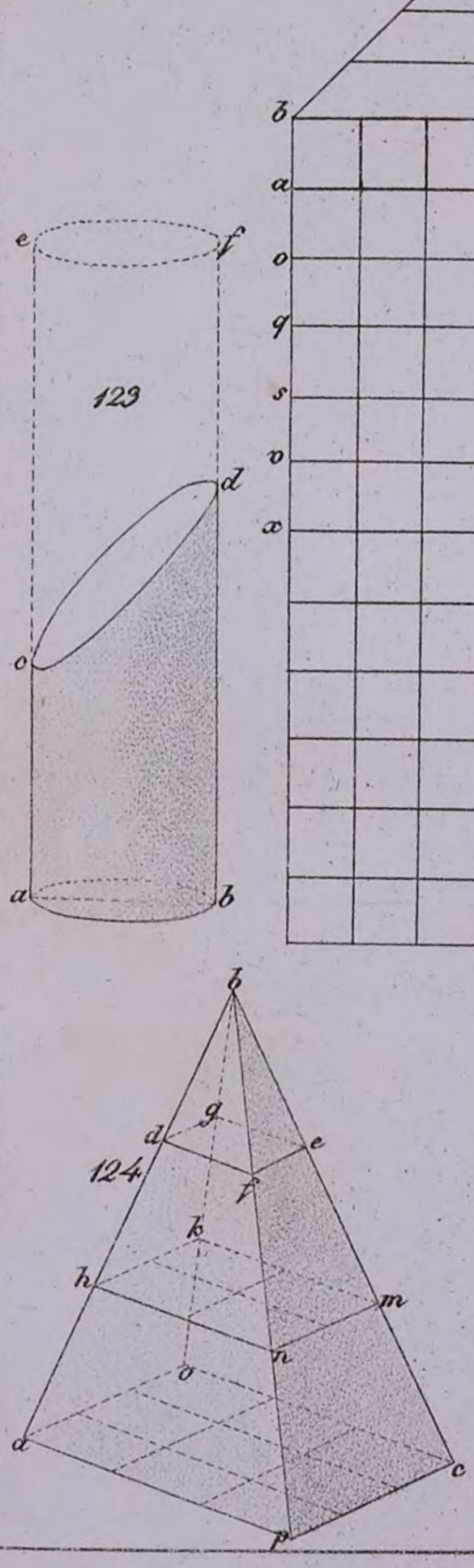




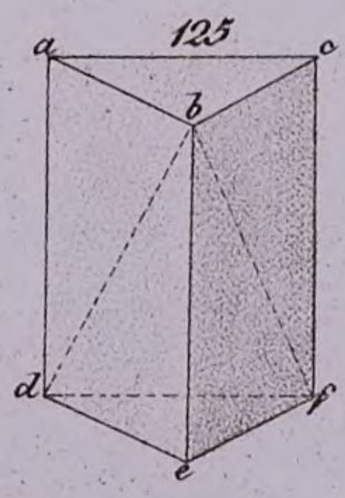
113

123

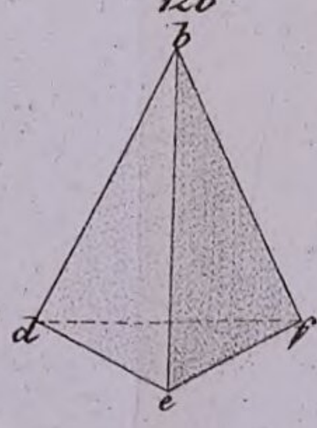
129



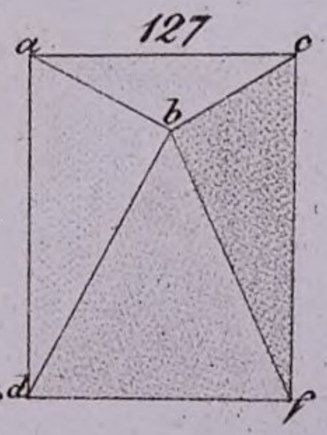
125



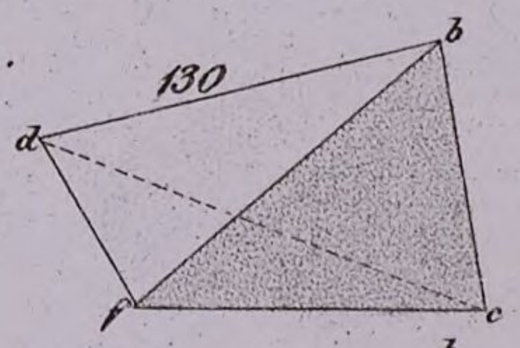
126



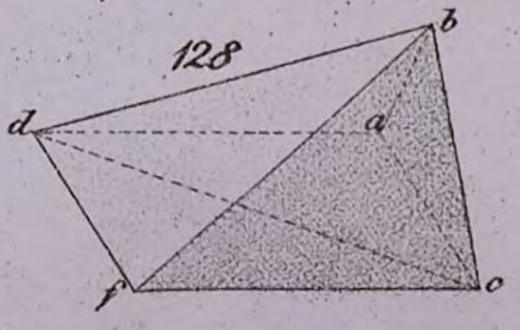
127

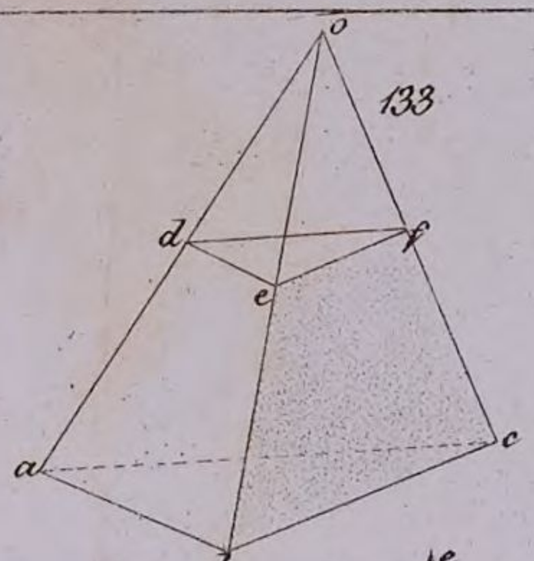


130

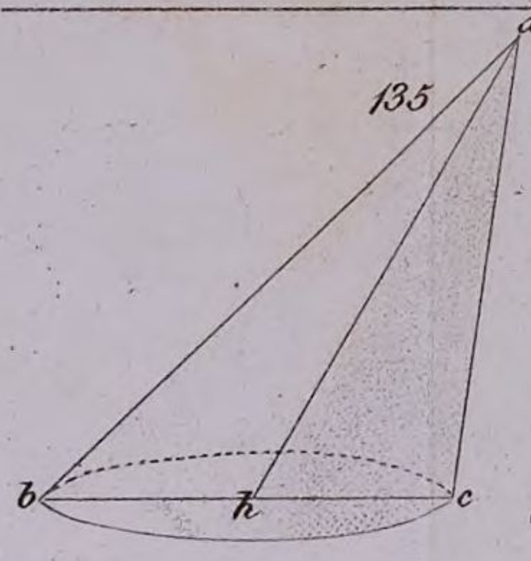


128

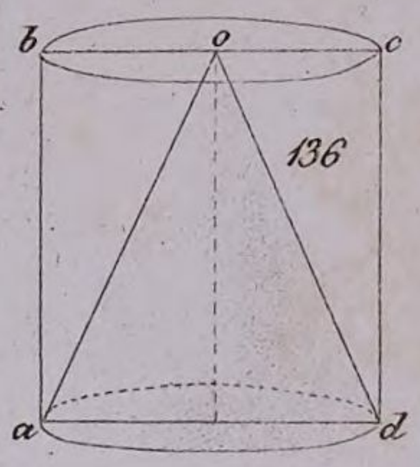




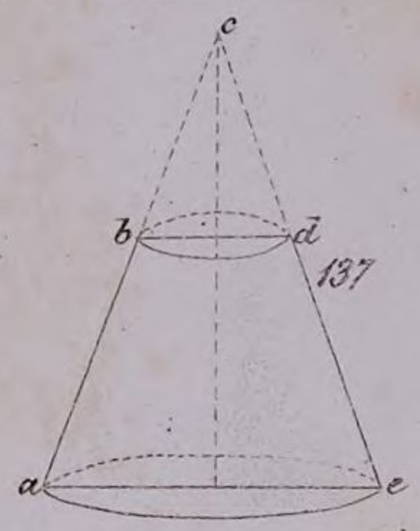
133



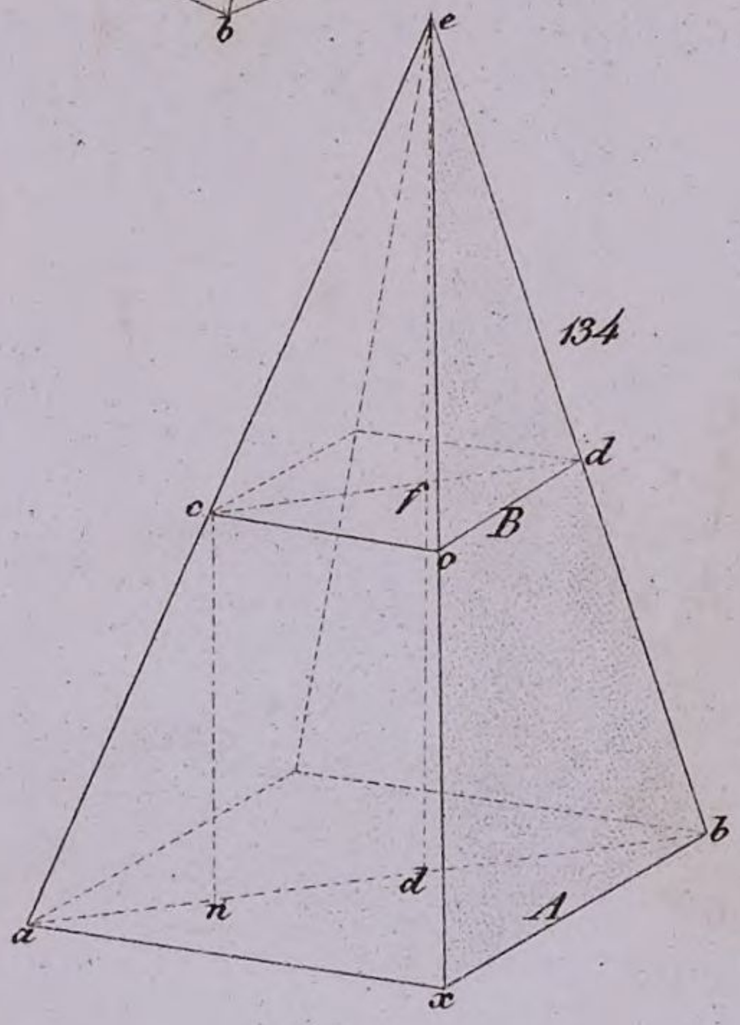
135



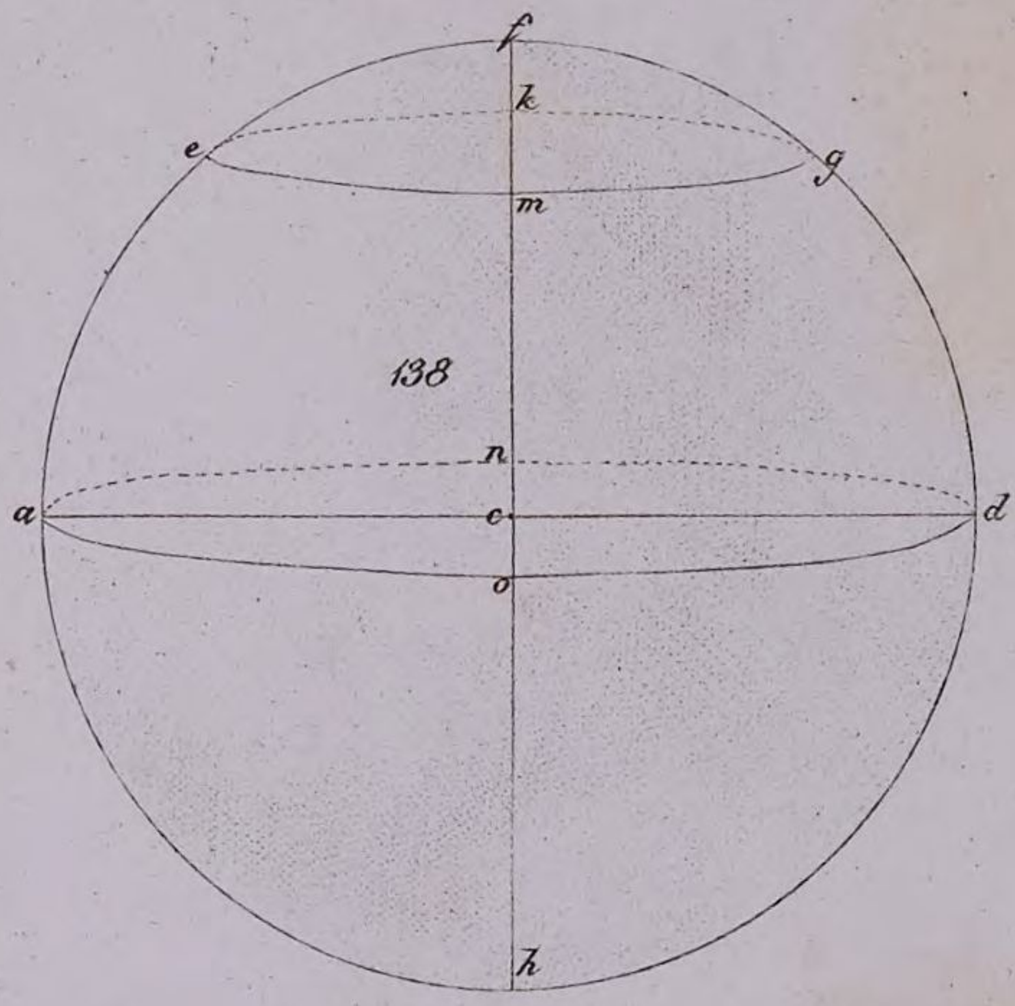
136



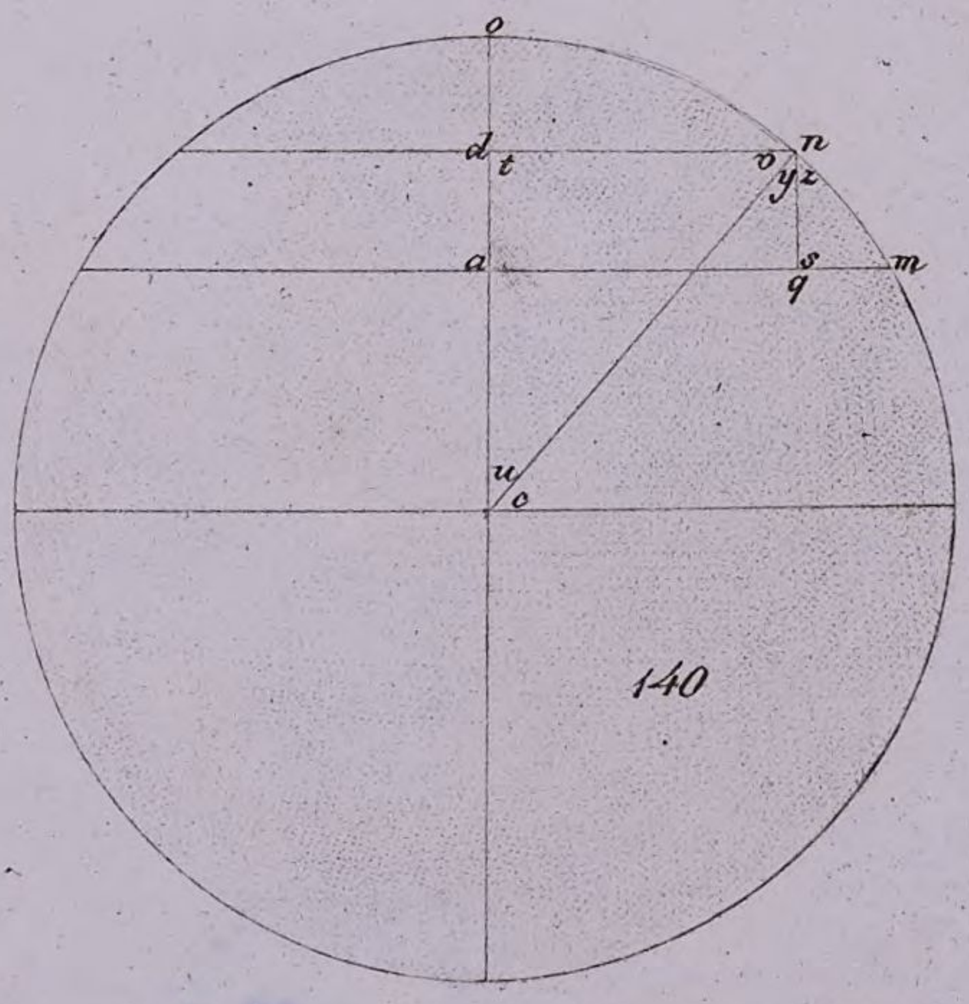
137



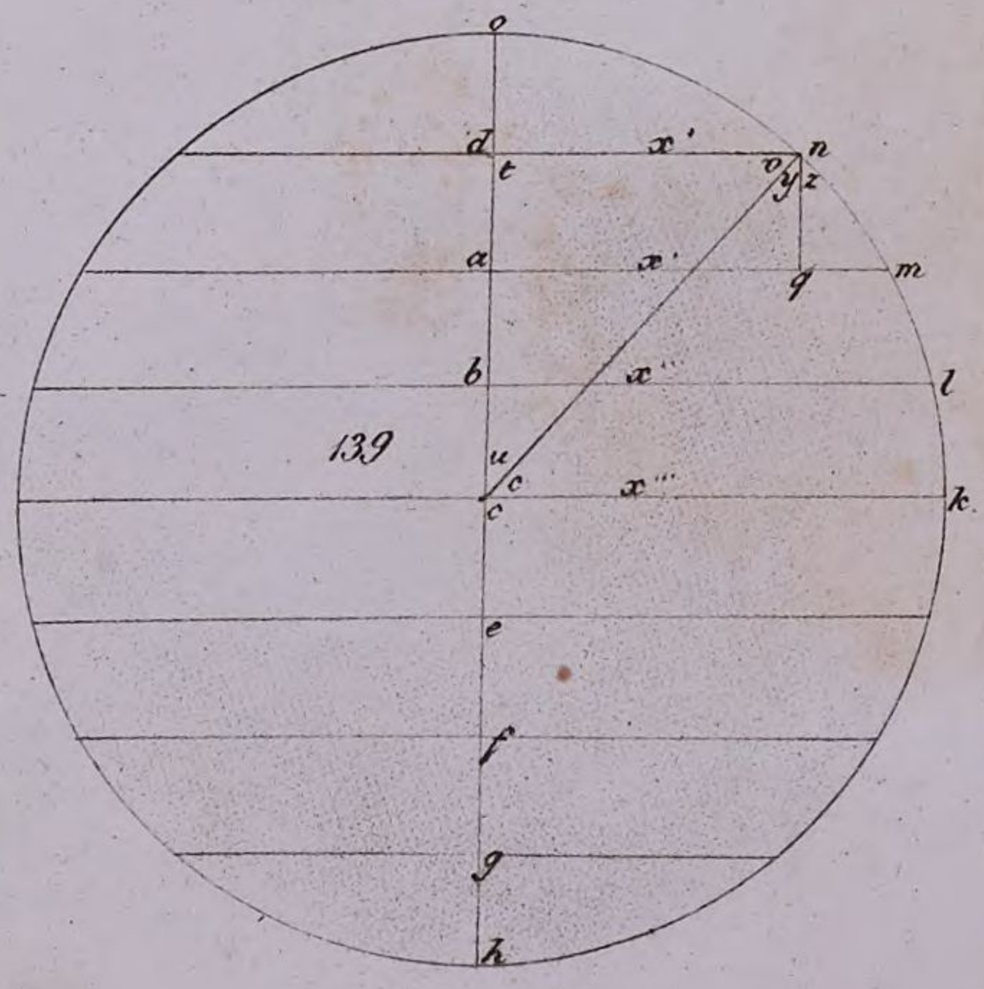
134



138



140



139

gest. b. K. Kolbe. v. J. Zipter

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Türk, Wilhelm <<von>>,

Leitfaden für den Unterricht in der Formen- und Größen-Lehre

Potsdam 1843

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 38(5)
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346049-2